Economía de la información y la incertidumbre
3er curso (1º Semestre)
Grado en Economía

Parte II. Tema III:

INTERACCION ESTRATEGICA: TEORIA DE JUEGOS

Bibliografía recomendada: Nicholson, capítulo 10 ofrece una introducción a alguno de los puntos mencionados. Para un tratamiento más completo se recomiendan los capítulos correspondientes del manual de Gibbons.

Tema III: INTERACCIÓN ESTRATÉGICA: TEORÍA DE JUEGOS

- 3.1. Tipos de juegos
- 3.2. Representación de un juego en forma normal y extensiva
- 3.3. Estrategias estrictamente y débilmente y dominadas
- 3.4. Eliminación iterada de estrategias dominadas
- 3.5. Equilibrio de Nash en estrategias puras y mixtas
- 3.6. Equilibrio perfecto: inducción hacia atrás
- 3.7. Juegos repetidos

3.1. Tipos de juegos

- Un juego es una interacción entre dos o mas personas. Por tanto, es una situación en la que el bienestar y la utilidad de cada uno de los participantes está condicionada a las decisiones de los demás.

- Podemos observar múltiples ejemplos en la vida real:
    1. Duopolio
    2. Subastas
    3. Negociación
    4. Medio ambiente

3.1. Tipos de juegos

- En un juego intervienen los siguientes elementos:
  1. jugadores
  2. estrategias
  3. pagos
- Los juegos pueden ser:
  1. Cooperativos
  2. No-cooperativos

3.1. Tipos de juegos

Jugadores

- Cada unidad de decisión es un jugador:
  - Pueden ser individuos, empresas, etc..
  - Tienen la habilidad para elegir entre posibles estrategias

3.1. Tipos de juegos

Estrategias

- Cada posible acción disponible para los jugadores es una estrategia
  - Puede ser una acción simple o un plan complejo de acciones
  - S_i es el conjunto de estrategias disponibles para el jugador i
  - s_i es la estrategia elegida por el jugador i, $s_i \in S_i$

3.1. Tipos de juegos

Pagos

- Pagos son los niveles de utilidad obtenidos por los jugadores
  - Los jugadores prefieren pagos superiores
  - $u_1(s_1,s_2)$ es el pago correspondiente al jugador 1 suponiendo que este elige s_1 y el jugador 2 s_2
    - $u_2(s_2, s_1)$ es el pago correspondiente al jugador 2 bajo las mismas circunstancias

3.2. Representación de un juego en forma normal y extensiva

El dilema del prisionero

- El Dilema del prisionero es uno de los juegos mas estudiados
- Dos sospechosos son arrestados
- La policía desea obtener la confesión

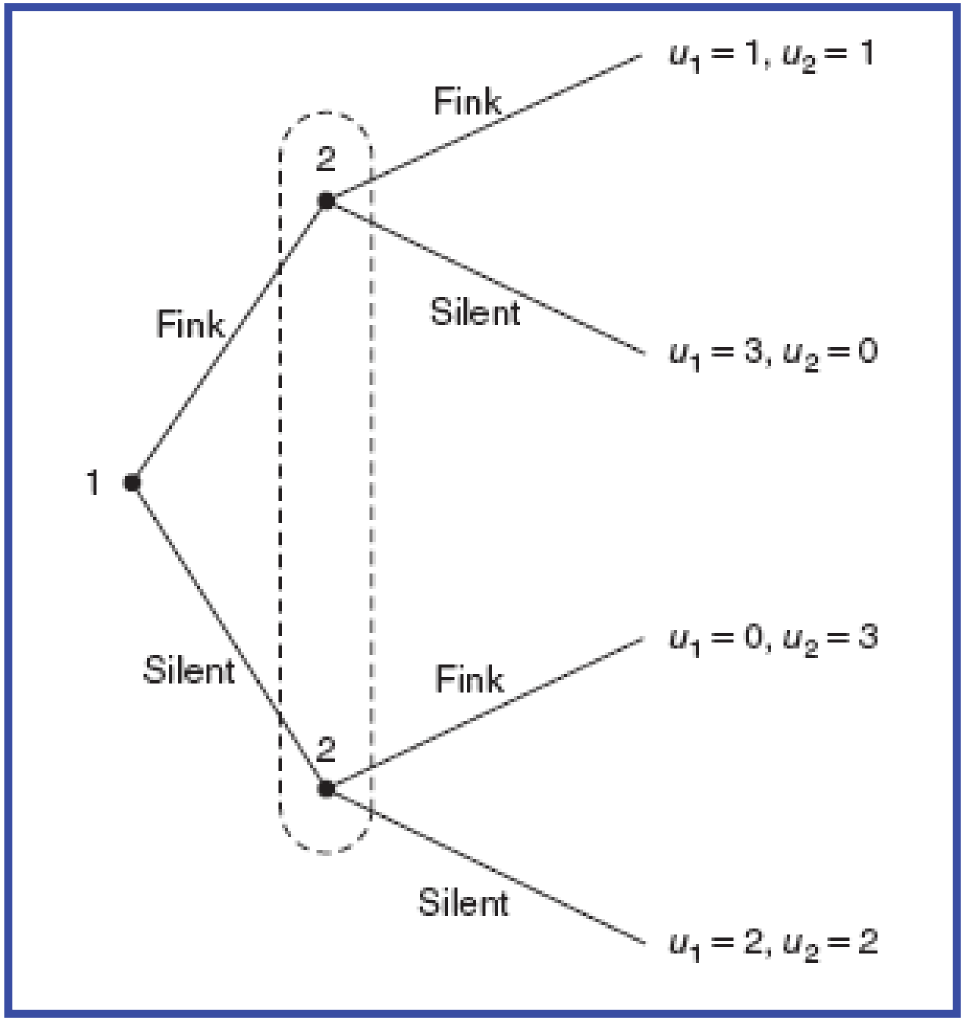
3.2. Representación de un juego en forma normal y extensiva

El dilema del prisionero

- En el Dilema del prisionero hay cuatro combinaciones de estrategias y dos pagos para cada combinación. Los pagos se pueden mostrar mediante:
- Una matriz en **forma normal**
- Un árbol en **forma extensiva**

3.2. Representación de un juego en forma normal y extensiva

DILEMA DEL PRISIONERO EN FORMA EXTENSIVA



- Cada nodo es un punto de decisión
- Los puntos marcados por la línea discontinua son los nodos del jugador 2
  - El jugador 2 no conoce la decisión del jugador 1

3.2. Representación de un juego en forma normal y extensiva

El dilema del prisionero en forma normal

- En la representación de un **juego en forma normal** cada jugador elige de forma simultanea una estrategia, y la combinación de las estrategias elegidas por los jugadores determina la ganancia de cada jugador.

3.2. Representación de un juego en forma normal y extensiva

El dilema del prisionero en forma normal

- El dilema del prisionero puede representarse mediante la siguiente matriz binaria

		Suspect 2	
		Fink	Silent
Suspect 1	Fink	$u_1 = 1,\ u_2 = 1$	$u_1 = 3,\ u_2 = 0$
	Silent	$u_1 = 0,\ u_2 = 3$	$u_1 = 2,\ u_2 = 2$

3.2. Representación de un juego en forma normal y extensiva

Representación en forma normal

- La representación en forma normal de un juego especifica:

  1) Los jugadores del juego

  2) Las estrategias de que dispone cada jugador

  3) La ganancia de cada jugador en cada combinación posible de estrategias.

3.2. Representación de un juego en forma normal y extensiva

- **Representación en forma normal**
- La representación en forma normal de un juego con n jugadores especifica los espacios de estrategias de los jugadores

$$S_{1}, \ldots, S_{n}$$

Y sus funciones de ganancias

$$u_{\mathrm{n}}(s_1,\ldots,s_n)\ldots\ u_{\mathrm{n}}(s_1,s_{\mathrm{n}})$$

Denotamos este juego como:

$$G = \{S_1, \ldots, S_n; u_1, \ldots, u_n\}$$

3.2. Representación de un juego en forma normal y extensiva

Representación en forma normal

- Aunque hemos indicado que en un juego en forma normal los jugadores eligen sus estrategias de forma simultanea, esto no significa que las partes actúen necesariamente de forma simultanea. Es suficiente que cada parte elija la acción a seguir sin conocer las decisiones de los demás.
- Además, la representación en forma extensiva, es a menudo un marco de trabajo mas conveniente para analizar los aspectos dinámicos de los juegos.

3.3. Estrategias estrictamente y débilmente y dominadas

- **Estrategia estrictamente dominada**
- En el juego en forma normal $G = \{S_1, \ldots, S_n; u_1, \ldots, u_n\}$, *sean* s'_i *y* s''_i *posibles estrategias del jugador i. La estrategia* s'_i *está estrictamente dominada por la estrategia* s''_i *si para combinación posible de las estrategias de los restantes jugadores la ganancia de i por utilizar* s'_i *es estrictamente menor que la ganancia de i por utilizar* s''_i *:*

$$u_i(s_1, \ldots, s_{i-1}, s'_i, s_{i+1}, \ldots, s_n) < u_i(s_1, \ldots, s_{i-1}, s''_i, s_{i+1}, \ldots, s_n)$$

Para cada $u_i(s_1, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots, s_n)$ *que puede ser construida a partir de los espacios de estrategias de otros jugadores* $S_1, \ldots, S_{i-1}, S_{i+1}, \ldots, S_n$.

3.3. Estrategias estrictamente y débilmente y dominadas

Estrategia estrictamente dominada

En el juego:

Preso 2

Preso 1

	Callarse	Confesar
Callarse	-1,-1	-9,0
Confesar	0,-9	-6,-6

La estrategia dominante es **confesa**r. Por tanto, los jugadores racionales no utilizan estrategias estrictamente dominadas.

3.4. Eliminación iterada de estrategias dominadas

En el juego:

Jugador 2

Jugador 1

	Izquierda	Centro	Derecha
Alta	1,0	1,2	0,1
Baja	0,3	0,1	2,0

Si el jugador 1 sabe que el jugador 2 es racional, el juego se convierte en:

Jugador 2

Jugador 1

	Izquierda	Centro
Alta	1,0	1,2
Baja	0,3	0,1

3.4. Eliminación iterada de estrategias dominadas

Si el jugador 1 es racional no elegirá baja. Por tanto, el jugador 2 puede eliminar baja del espacio de estrategias del jugador 1 :

Jugador 2

Jugador 1

	Izquierda	Centro	Derecha
Alta	1,0	1,2	0,1

3.4. Eliminación iterada de estrategias dominadas

Este proceso se denomina eliminación iterada de estrategias dominadas. Presenta dos inconvenientes:

- *En primer lugar, cada paso requiere un supuesto adicional sobre lo que los jugadores saben acerca de la racionalidad del otro.*

- *El proceso conduce a menudo a una predicción imprecisa sobre el desarrollo del juego.*

3.4. Eliminación iterada de estrategias dominadas

Por ejemplo, en este juego:

	I	C	D
A	0,4	4,0	5,3
M	4,0	0,4	5,3
B	3,5	3,5	6,6

No hay estrategias estrictamente dominadas para ser eliminadas.

3.4. Eliminación iterada de estrategias dominadas

A continuación, abordamos el ***equilibrio de Nash****, un concepto de solución que da lugar a predicciones mucho mas precisas en una clase de juegos muy amplia.*

3.5. Equilibrio de Nash en estrategias puras y mixtas

Equilibrio de Nash

En el juego en forma normal de n jugadores, $G = \{S_1, \dots, S_n; u_1, \dots, u_n\}$, las estrategias $\left(s_1^*, \dots, s_n^*\right)$ forman un equilibrio de Nash, si para cada jugador i, s_i^* es la mejor respuesta del jugador i a las estrategias de los otros n-1 jugadores, $\left(s_1^*, \dots, s_{i-1}^*, s_{i+1}^*, \dots, s_n^*\right)$:

$$u_i\left(s_1^*, \dots, s_{i-1}^*, s_i^*, s_{i+1}^*, \dots, s_n^*\right) \geq u_i\left(s_1^*, \dots, s_{i-1}^*, s_i, s_{i+1}^*, \dots, s_n^*\right)$$

Para cada posible estrategia si en Si; esto es, s_i^* *es una solución de*

$$\max_{s_i \in S_i} u_i\left(s_1^*, \dots, s_{i-1}^*, s_i, s_{i+1}^*, \dots, s_n^*\right)$$

En el equilibrio de Nash ningún jugador tendrá incentivos a desviarse

3.5. Equilibrio de Nash en estrategias puras y mixtas

Si surge un acuerdo sobre cómo comportarse en un determinado juego, las estrategias fijadas por el convenio deben formar un ***equilibrio de Nash****; si no, habrá un jugador que no se regirá por el convenio.*

3.5. Equilibrio de Nash en estrategias puras y mixtas

Por ejemplo, en este juego:

	I	C	D
A	0,<u>4</u>	<u>4</u>,0	5,3
M	<u>4</u>,0	0,<u>4</u>	5,3
B	3,5	3,5	<u>6</u>,<u>6</u>

(B,D) es el único par de estrategias que satisface EN

3.5. Equilibrio de Nash en estrategias puras y mixtas

Pueden existir estrategias que sobrevivan a la eliminación iterativa de estrategias estrictamente dominadas pero que no formen parte de ningún equilibrio de Nash.

Por tanto, el equilibrio de Nash es un concepto de solución más poderoso que la eliminación iterativa de las estrategias estrictamente dominadas.

Nash (1950) demostró que en cualquier juego finito existe al menos un equilibrio de Nash.

3.5. Equilibrio de Nash en estrategias puras y mixtas

El ejemplo de la *Batalla de los sexos* muestra que un juego puede tener múltiples equilibrios de Nash. En dicho juego Pat y Chris deben elegir entre ir a la ópera o a un combate de boxeo:

Pat

		Opera	Boxeo
Chris	Opera	2,1	0,0
	Boxeo	0,0	1,2

Ambos, (opera, opera) y (boxeo, boxeo) son equilibrios de Nash.

3.5. Equilibrio de Nash en estrategias puras y mixtas

Así, la existencia de múltiples equilibrios de Nash no es un problema en sí mismo.

Sin embargo, en la batalla de los sexos (opera, opera) y (boxeo, boxeo) parecen igualmente atractivos, lo que indica que pueden juegos para los cuales la teoría de juegos no ofrece una solución única y en los que no se llegará a ningún acuerdo.

3.5. Equilibrio de Nash en estrategias puras y mixtas

Estrategias mixtas

Según el equilibrio de Nash:

$$u_i\left(s_1^*,\ldots,s_{i-1}^*,s_i^*,s_{i+1}^*,\ldots,s_n^*\right)\geq u_i\left(s_1^*,\ldots,s_{i-1}^*,s_i\ ,s_{i+1}^*,\ldots,s_n^*\right)$$

Siguiendo esta definición, veremos que en el siguiente ejemplo (juego de las monedas) no existe EN.

3.5. Equilibrio de Nash en estrategias puras y mixtas

Estrategias mixtas

En este juego el espacio de estrategias de cada jugador es (cara,cruz):

Jugador 2

Jugador 1

	Cara	Cruz
Cara	-1,<u>1</u>	<u>1</u>,-1
Cruz	<u>1</u>,-1	-1,<u>1</u>

Si las dos monedas coinciden, esto es, ambas muestran la misma cara, el jugador 2 gana la moneda del jugador 1. En caso contrario, el jugador 1 gana la moneda del jugador 2.

En este juego, no existe ningún EN.

3.5. Equilibrio de Nash en estrategias puras y mixtas

Estrategias mixtas

En cualquier juego en el cual a cada jugador le convenga adivinar la jugada del otro y que el otro no adivine la suya, no existe ningún equilibrio de Nash, porque la solución de tal juego incluye necesariamente un elemento de incertidumbre sobre lo que harán los jugadores.

Surge así la noción de ***estrategia mixta.***

3.5. Equilibrio de Nash en estrategias puras y mixtas

Estrategias mixtas

Formalmente, para el jugador i una estrategia mixta es una distribución de probabilidad sobre (algunas o todas) las estrategias en Si.

Nos referiremos a las estrategias Si como *estrategias puras* del jugador i.

3.5. Equilibrio de Nash en estrategias puras y mixtas

Estrategias mixtas

Suponiendo que el jugador i cuenta con k estrategias puras: $S_i = \{s_{i1}, ..., s_{ik}\}$

Entonces, para el jugador i una estrategia mixta es una distribución de probabilidad $(p_{i1}, ..., p_{ik})$, en la que p_{ik} es la probabilidad de que el jugador i elija la estrategia s_{ik} , para k = 1,…,K.

$$0 < p_{ik} < 1 \qquad k = 1, ..., K$$

$$p_{1k} + ... + p_{ik} = 1$$

3.5. Equilibrio de Nash en estrategias puras y mixtas

Estrategias mixtas

Entonces, p_i denota una estrategia mixta en el conjunto de distribuciones de probabilidad sobre S_i .

Y, del mismo modo, s_i denota una estrategia pura de S_i .

3.5. Equilibrio de Nash en estrategias puras y mixtas

Estrategias mixtas

En el juego en forma normal $G = \{S_1,\ldots,S_n; u_1,\ldots,u_n\}$ supongamos que $S_i = \{s_{i1},\ldots,s_{ik}\}$. En este caso, para el jugador i una estrategia mixta es una distribución de probabilidad $p_i = (p_{i1},\ldots,p_{ik})$, donde $0 < p_{ik} < 1$para k = 1,…,K y $p_{1k} + \ldots + p_{ik} = 1$

Veamos como es la noción de **estrategias estrictamente dominadas** en este contexto

3.5. Equilibrio de Nash en estrategias puras y mixtas

Estrategias mixtas

Por ejemplo, en este juego:

Jugador 2

Jugador 1

	I	D
A	3,-	0,-
M	0,-	3,-
B	2,-	2,-

Para cualquier conjetura (q,1-q) que el jugador 1 pudiera formarse sobre el juego del jugador 2, la mejor respuesta de 1 es o A (si q>=1/2) o M (si q<=1/2), pero nunca B. Por tanto, B está estrictamente dominada por una estrategia mixta: si el jugador 1 elige A y M con probabilidad ½, 3/2 es mayor que el pago que produce a 1 con certeza la opción B.

3.5. Equilibrio de Nash en estrategias puras y mixtas

Estrategias mixtas

Este ejemplo muestra que una estrategia pura dada puede ser una mejor respuesta a una estrategia mixta, incluso si la estrategia pura no es una mejor respuesta a ninguna otra estrategia pura.

En este juego, B no es una mejor respuesta para el jugador 1 a I o D del jugador 2, pero B es la mejor respuesta del jugador 1 a la estrategia mixta (q, 1-q) del jugador 2, siempre que $1/3<q<2/3$.

3.6. Equilibrio perfecto: inducción hacia atrás

Juegos dinámicos con información completa y perfecta (o secuenciales)

- En este apartado presentamos los juegos dinámicos, con información completa.
- Para ello, vamos a suponer un juego sencillo:

  - El jugador 1 escoge una acción a1 del conjunto factible A1.

  - El jugador 2 observa a1 y escoge una acción a2 del conjunto factible A2.

  - Las ganancias son u1(a1,a2) y u2(a1,a2).

3.6. Equilibrio perfecto: inducción hacia atrás

Juegos dinámicos con información completa y perfecta (o secuenciales)

- Las características claves de un juego dinámico con información completa y perfecta son que:

  - Las decisiones se toman de manera sucesiva.

  - Todas las decisiones anteriores son conocidas antes de tomar la decisión siguiente.

  - Las ganancias de los jugadores para cada combinación posible de jugadas son información del dominio público.

3.6. Equilibrio perfecto: inducción hacia atrás

Juegos dinámicos con información completa y perfecta (o secuenciales)

- Resolvemos un juego por inducción hacia atrás de la siguiente forma:

Cuando al jugador 2 le corresponda decidir en la segunda etapa, se enfrentará al siguiente problema, dada la acción a1 previamente elegida por el jugador 1:

$$\max_{a_2 \in A_2} u_2(a_1, a_2)$$

Siendo R1(a1) la reacción (o mejor respuesta) a la acción del jugador 1, el problema de 1 en la primera etapa se concreta en:

$$\max_{a_1 \in A_1} u_1(a_1, R_2(a_1))$$

Suponiendo que este problema de optimización del jugador 1 tiene también una solución única que podemos denominar a*1, $(a_1^*, R_2(a_1^*))$ es el resultado por inducción hacia atrás. Dicho resultado ignora las amenazas no creíbles.

3.6. Equilibrio perfecto: inducción hacia atrás

Juegos dinámicos con información completa y perfecta (o secuenciales)

- Para ilustrar esta idea, consideremos el siguiente juego de tres etapas, en el que el jugador 1 decide dos veces:

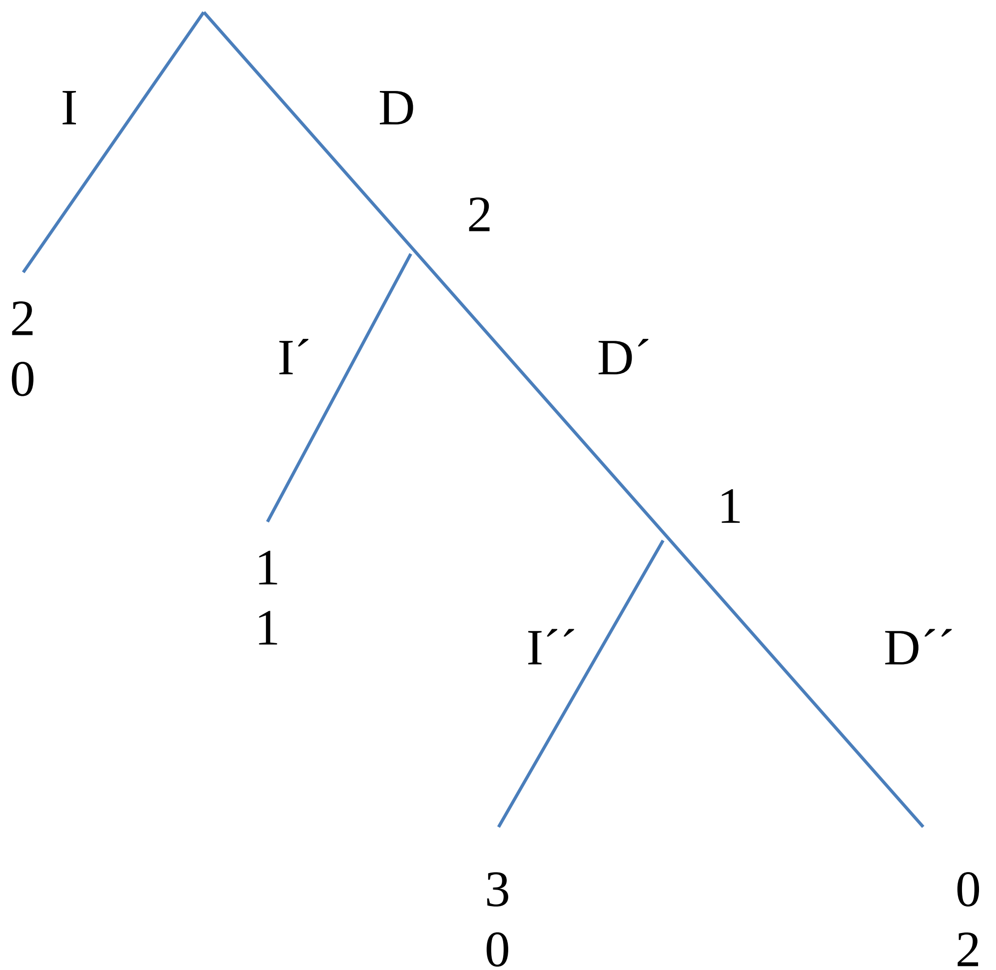
  - El jugador 1 escoge I o D donde I finaliza el juego con ganancias de 2 para el jugador 1 y 0 para el jugador 2.

  - El jugador 2 observa la elección de 1. Si 1 escoge D entonces 2 escoge I´ o D´, donde I´ finaliza el juego con ganancias de 1 para ambos jugadores.

  - El jugador 1 observa la elección de 2 (y recuerda su propia decisión en la primera etapa). Si las decisiones anteriores fueron D y D´ entonces 1 escoge I´´ o D´´ finalizando ambas el juego, I´´ con ganancias de 3 para el jugador 1 y 0 para el jugador 2 y D´´ con ganancias de 0 y 2 respectivamente.

3.6. Equilibrio perfecto: inducción hacia atrás

Juegos dinámicos con información completa y perfecta (o secuenciales)



3.6. Equilibrio perfecto: inducción hacia atrás

Juegos dinámicos con información completa y perfecta (o secuenciales)

- Por inducción hacia atrás:

En la tercera etapa el jugador 1 elige I´´

Por tanto, en la segunda etapa el jugador 2 elige I´

Así pues, el resultado por inducción hacia atrás es que el jugador 1 escoge I en la primera etapa, y se acaba el juego.

3.6. Equilibrio perfecto: inducción hacia atrás

Juegos dinámicos con información completa y perfecta (o secuenciales)

En los juegos en los que algún individuo no es racional, el uso de la inducción hacia atrás pierde mucho de su atractivo como predicción del juego, tal y como sucede en el equilibrio de Nash, en juegos en los que la teoría no proporciona un único equilibrio.

3.6. Equilibrio perfecto: inducción hacia atrás

Juegos dinámicos con información completa y perfecta (o secuenciales)

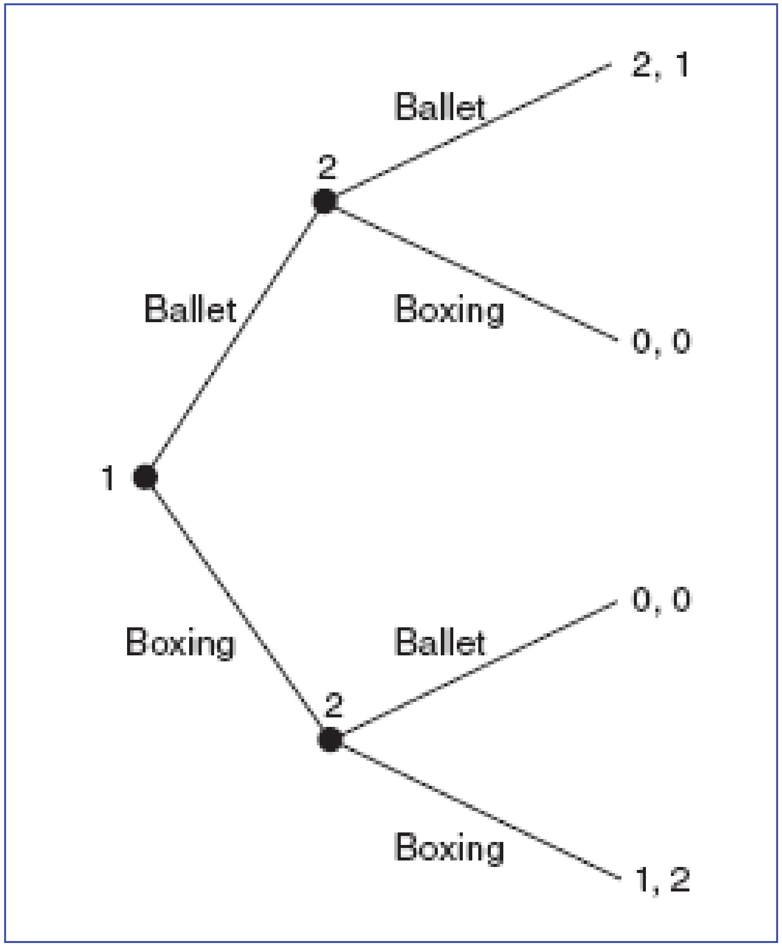
Batalla de los sexos secuencial:

La mujer elige primero y el marido observa su elección.

- Las estrategias de la mujer son ballet y boxeo.
- El marido puede elegir dos estrategias (ballet o boxeo), por cada una de las dos correspondientes a su mujer.

3.6. Equilibrio perfecto: inducción hacia atrás

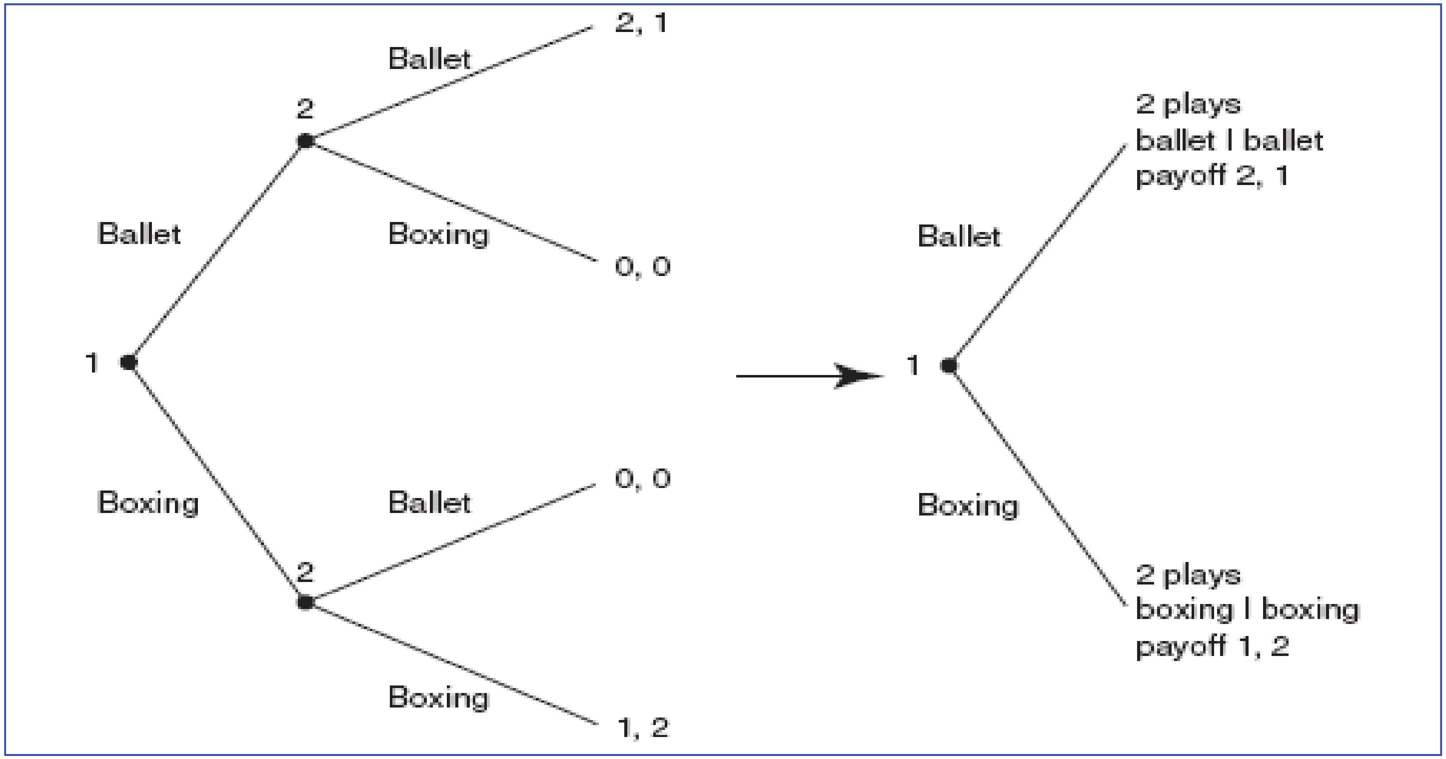
Juegos dinámicos con información completa y perfecta (o secuenciales)



- El marido observa la elección de su mujer.
- Elige sabiendo la elección de su mujer.

3.6. Equilibrio perfecto: inducción hacia atrás

Juegos dinámicos con información completa y perfecta (o secuenciales)



Por inducción hacia atrás, la mujer sabe que el marido va a elegir Ballet, Ballet o Boxing,Boxing. Por tanto, la mujer elige **Ballet, Ballet**.

Por tanto, el orden de decisión si importa.

3.6. Equilibrio perfecto: inducción hacia atrás

Juegos dinámicos con información completa e imperfecta perfección en sub-juegos

- Continuamos suponiendo que el juego sigue una sucesión de etapas, habiendo los jugadores observado las decisiones formadas en las etapas previas antes del comienzo de una nueva etapa.
- Sin embargo, permitimos que haya decisiones simultaneas en cada etapa, lo que conlleva **información imperfecta**.

3.6. Equilibrio perfecto: inducción hacia atrás

Juegos dinámicos con información completa e imperfecta perfección en sub-juegos

- Este tipo de juegos, cumplen las siguientes características:

  - Los jugadores 1 y 2 escogen simultáneamente las acciones a1 y a2 de los conjuntos factibles A1 y A2.

  - Los jugadores 3 y 4 observan el resultado de la primera etapa, (a1,a2) y escogen entonces simultáneamente las acciones a3 y a4 de los conjuntos factibles A3 y A4.

  - Las ganancias son ui(a1,a2,a3,a4) para i=1,2,3,4.

3.6. Equilibrio perfecto: inducción hacia atrás

Juegos dinámicos con información completa e imperfecta perfección en sub-juegos

- Los juegos de esta clase se resuelven utilizando un enfoque parecido al de la inducción hacia atrás, pero esta vez, el primer paso que damos cuando nos movemos hacia atrás desde el final del juego exige la resolución de un juego real (el juego simultaneo entre los jugadores 3 y 4 en la segunda etapa, dado el resultado de la primera).

3.6. Equilibrio perfecto: inducción hacia atrás

Juegos dinámicos con información completa e imperfecta perfección en sub-juegos

- Si los jugadores 1 y 2 prevén que el comportamiento en la segunda etapa de los jugadores 3 y 4 vendrá dado por (a*3(a1,a2),a*4(a1,a2)), la interacción entre los jugadores 1 y 2 en la primera etapa se concentra en el siguiente juego de decisiones simultaneas:

  - 1) Los jugadores 1 y 2 escogen simultáneamente las acciones a1 y a2 de los conjuntos factibles A1 y A2.

  - 2) Las ganancias son ui(a*3(a1,a2),a*4(a1,a2)), i=1,…,4.

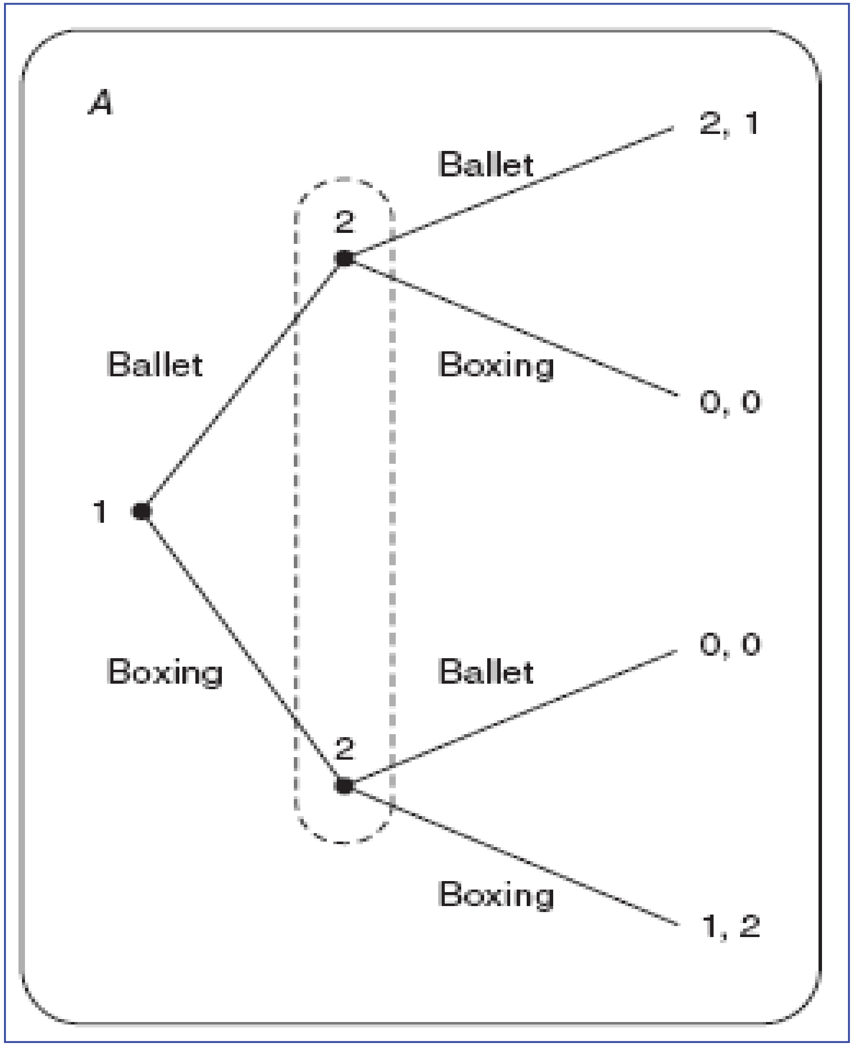
3.6. Equilibrio perfecto: inducción hacia atrás

Juegos dinámicos con información completa e imperfecta perfección en sub-juegos

- Supongamos que (a*1,a*2) es el único equilibrio de Nash de este juego de decisiones simultaneas. Entonces, (a*1,a*2,a*3(a*1,a*2), a*4(a*1,a*2)), es el resultado perfecto en subjuegos de este juego en dos etapas.
- Este resultado es el análogo natural del resultado por inducción hacia atrás en los juegos con información completa y perfecta, en cuyo caso los jugadores 1 y 2 no deberían creer ninguna amenaza por parte de los jugadores 3 y 4 que correspondiera a acciones que no fueran el EN del juego que queda en la segunda etapa.

3.6. Equilibrio perfecto: inducción hacia atrás

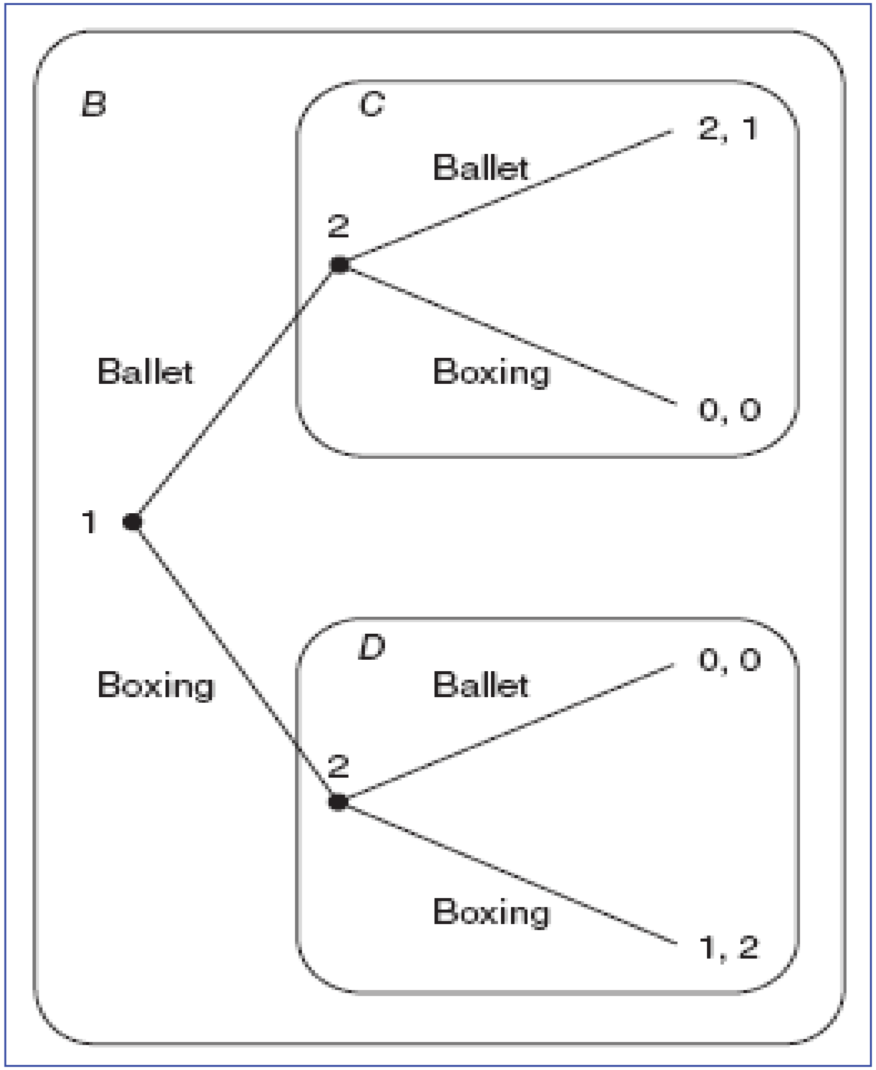
Juegos dinámicos con información completa e imperfecta perfección en sub-juegos



- En la batalla de los sexos, el juego simultaneo solo tiene un subjuego.

3.6. Equilibrio perfecto: inducción hacia atrás

Juegos dinámicos con información completa e imperfecta
perfección en sub-juegos



- El juego secuencial consta de tres subjuegos.
- El equilibrio perfecto en subjuegos es una estrategia ($s^*_1, s^*_2, \ldots, s^*_n$) que constituye el equilibrio de Nash para cada subjuego.

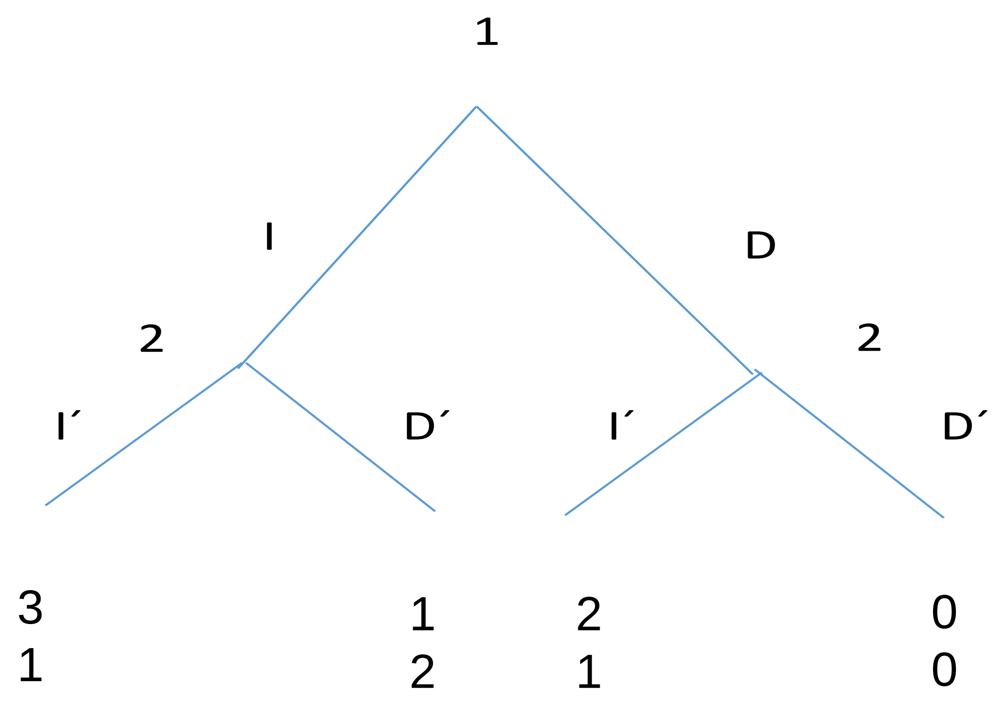
3.6. Equilibrio perfecto: inducción hacia atrás

Juegos dinámicos con información completa e imperfecta
perfección en sub-juegos

- En definitiva, la perfección en subjuegos elimina los equilibrios de Nash que se basan en promesas o amenazas que no son creíbles.

3.6. Equilibrio perfecto: inducción hacia atrás

Juegos dinámicos con información completa e imperfecta
perfección en sub-juegos



3.6. Equilibrio perfecto: inducción hacia atrás

Juegos dinámicos con información completa e imperfecta
perfección en sub-juegos

- La mejor respuesta de 1 al comportamiento previsto del jugador 2 es jugar D en la primera etapa, de forma que el resultado del juego por inducción hacia atrás es (D,I´).

- Sin embargo, el jugador 2 habría escogido D´ si el 1 hubiese elegido I.

- Por tanto, (D,(D´,I´)) es Equilibrio de Nash perfecto en sub-juegos.

- Por último, el Equilibrio de Nash (I,(D´,D´)) no es perfecto en sub-juegos, porque las estrategias de los jugadores no constituyen un Equilibrio de Nash en uno de los sub-juegos.

3.7. Juegos repetidos

- Es posible que las amenazas y promesas sobre el comportamiento futuro puedan influir en el comportamiento presente en situaciones que se repiten en el tiempo.

3.7. Juegos repetidos

Juegos repetidos en dos etapas

- Así por ejemplo, si consideramos que en el dilema del prisionero los participantes deciden simultáneamente en dos ocasiones, habiendo observado el resultado de la primera decisión antes de decidir por segunda vez y que las ganancias del juego son la suma de las ganancias en cada etapa, obtendremos en la 1ª etapa:

Jugador 2

		I2	D2
Jugador 1	I1	1,1	5,0
	D1	0,5	4,4

EN : (I1,I2)=(1,1)

3.7. Juegos repetidos

Juegos repetidos en dos etapas

- 2ª etapa: Se suma (I1,I2) a la primera

Jugador 2

Jugador 1		I2	D2
	I1	2,2	6,1
	D1	1,6	5,5

EN : (I1,I2)=(2,2)

3.7. Juegos repetidos

Juegos repetidos en dos etapas

- En los juegos repetidos en dos etapas permitimos la posibilidad de que el Equilibrio de Nash del juego restante en la segunda etapa dependa del resultado de la primera etapa,$(a^*_3(a_1,a_2),a^*_4(a_1,a_2))$, en vez de simplemente (a^*_3,a^*_4) .

3.7. Juegos repetidos

Juegos repetidos en dos etapas

- **Definición**: Dado un juego de etapa G, G(T) denota el **juego repetido finitamente** en el que G se juega T veces, habiendo los jugadores observado los resultados de todas las jugadas anteriores antes de que empiece la siguiente. Las ganancias de G(T) son simplemente la suma de las ganancias de los T juegos de etapa.

3.7. Juegos repetidos

Juegos repetidos en dos etapas

- **Proposición**: Si el juego de etapa G tiene un único equilibrio de Nash, entonces para cualquier T finito, el juego repetido G(T) tiene un único resultado perfecto en sub-juegos: en cada etapa se juega el Equilibrio de Nash de G.

3.7. Juegos repetidos

Juegos repetidos en dos etapas

- Veamos otro ejemplo: añadimos al juego anterior las estrategias Di, de forma que ahora existen dos EN en estrategias puras: (I1,I2) y (D1,D2).

Jugador 2

Jugador 1		I2	C2	D2
	I1	1,1	5,0	0,0
	C1	0,5	4,4	0,0
	D1	0,0	0,0	3,3

Supongamos que el juego se juega dos veces. Es posible que los jugadores prevean que a resultados diferentes en la primera etapa les siguen equilibrios diferentes en la segunda etapa.

3.7. Juegos repetidos

Juegos repetidos en dos etapas

- ¿Qué sucede si sumamos (D1,D2) a la casilla (C1,C2) y (I1,I2) a las restantes?

Jugador 2

Jugador 1

	I2	C2	D2
I1	2,2	6,1	1,1
C1	1,6	7,7	1,1
D1	1,1	1,1	4,4

Existen tres EN con estrategias puras en la 2ª etapa: (I1,I2), (C1,2) y (D1,D2).

3.7. Juegos repetidos

Juegos repetidos en dos etapas

- El EN (I1,I2) corresponde al resultado perfecto en sub-juegos ((I1,I2), (I1,I2)) del juego repetido.

- El EN (D1,D2) corresponde al resultado perfecto en sub-juegos ((D1,D2), (I1,I2)) del juego repetido.

- El EN (C1,C2) corresponde al resultado perfecto en sub-juegos ((C1,C2), (D1,D2)) del juego repetido.

3.7. Juegos repetidos

Juegos repetidos en dos etapas

- La principal conclusión que debemos sacar de este ejemplo es que las amenazas o las promesas creíbles sobre el comportamiento futuro pueden influir en el comportamiento presente.
- Al derivar el resultado perfecto en sub-juegos ((C1,C2),(D1,D2)), por ejemplo, hemos supuesto que los jugadores prevén que (D1,D2) será el resultado de la segunda ronda si el resultado en la primera etapa es (C1,C2), y que (I1,I2) será el resultado en la segunda etapa si el de la primera ronda es cualquiera de los restantes.
- Aunque, jugar (I1,I2) en la segunda etapa, con ganancias (1,1), puede resultar poco atractivo, frente a ganar (3,3) con (D1,D2).

3.7. Juegos repetidos

Juegos repetidos en dos etapas

- Según esto, parecería razonable pensar que los jugadores tenderán a negociar.

3.7. Juegos repetidos

Juegos repetidos infinitamente

- Un resultado más poderoso se da en los juegos repetidos infinitamente: incluso si el juego de etapa tiene un único EN, pueden existir muchos resultados perfectos en sub-juegos en los que ninguno de los resultados en cada etapa sea un EN de G.

Definición: Dado un factor de descuento δ, el valor presente de la sucesión infinita de pagos $\pi_1, \pi_2, \ldots$ es

$$\pi_1 + \delta\pi_2 + \delta^2\pi_3 + \ldots = \sum_{t=1}^{\infty} \delta^{t-1}\pi_t$$

3.7. Juegos repetidos

Juegos repetidos infinitamente

- Supongamos el dilema del prisionero repetido infinitamente:

Jugador 2

Jugador 1

	I2	D2
I1	1,1	5,0
D1	0,5	4,4

En el que el factor de descuento de cada jugador es δ , y la ganancia de cada jugador en el juego repetido es el valor presente de las ganancias del jugador en los juegos de etapa.

3.7. Juegos repetidos

Juegos repetidos infinitamente

- La estrategia del jugador i es:

Jugar Di en la primera etapa. En la t-ésima etapa, si el resultado de todas las t-1 etapas anteriores ha sido (D1,D2) entonces jugar Di; en caso contrario, jugar Ii.

- Esta estrategia es un ejemplo de «estrategia de gatillo», llamada así porque el jugador i coopera hasta que alguien deja de cooperar, lo que desencadena la decisión de no volver a cooperar nunca más.
- Si ambos jugadores adoptan la estrategia de gatillo, el resultado del juego repetido infinitamente será (D1,D2) en cada etapa y si δ está lo suficientemente cerca de uno, el hecho de que los dos jugadores adopten esta estrategia constituye EN del juego repetido.

3.7. Juegos repetidos

Juegos repetidos infinitamente

- Dado que el jugador i jugará Ii para siempre cuando el resultado de alguna ronda difiera de (D1,D2), la mejor respuesta del jugador j es jugar Ij para siempre cuando el resultado de alguna etapa difiera de (D1,D2).

- Jugar Ij proporcionaría una ganancia de 5 en esta etapa, pero desencadenaría la no cooperación del jugador i (y por tanto también de j) en lo sucesivo, de forma que la ganancia en cada etapa futura sería 1. Como $1+\delta\cdot 1+\delta^2\cdot 1+\ldots = 1/1-\delta$, el valor presente de esta sucesión de ganancias es

$$V = 5 + \frac{\delta}{1-\delta}$$

- Si jugar Dj es óptimo entonces

$$V = \frac{4}{1-\delta}$$

3.7. Juegos repetidos

Juegos repetidos infinitamente

- Por tanto, jugar Dj es óptimo si y solo si:

$$\frac{4}{1-\delta} \geq 5 + \frac{\delta}{1-\delta}$$

O $\delta \geq 1/4$

- Entonces, la estrategia de gatillo es EN si se cumple que $\delta \geq 1/4$
- Por tanto, queda demostrado que no es óptimo desviarse unilateralmente de una estrategia de gatillo (si el descuento no es suficientemente alto).
- En otras palabras, un vector de estrategias de gatillo es un EN.
- En un dilema del prisionero repetido, por tanto, la cooperación es posible en equilibrio.

3.7. Juegos repetidos

Juegos repetidos infinitamente

- Cabe destacar que:
- 1) Aparte de este equilibrio, existen muchos otros (no cooperar en ninguna ronda, por ejemplo). Por tanto, la teoría no da una predicción precisa.
- 2) Puede probarse que si el juego no pudiera repetirse a partir de una ronda determinada, el único equilibrio sería «no cooperar nunca»: la cooperación requiere un horizonte infinito de juego.