Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MADRID

COOPERA | Programa de Cooperación Educativa de la Universidad Autónoma de Madrid
UAM UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID

Crecimiento Económico

3er Curso, 2º Semestre, Grado Economía

Grupo 239

Tema 4: El modelo de Ramsey

Bibliografía recomendada: Sala-i-martin, cap 3.

Profesora: Inmaculada Álvarez

4.1 Un modelo de elección intertemporal con un número finito de periodos

Un modelo de elección intertemporal de dos periodos:

Supongamos un modelo de elección intertemporal en el que un individuo tiene que elegir la cantidad que consume en dos periodos t=0,1. El individuo posee en el primer periodo una riqueza inicial en forma de capital K_0 que unido a la cantidad de trabajo dedicada a la producción, L, le permite obtener una producción Y_0 a través de la siguiente tecnología:

$$Y_0 = F(K_0, L) = AK_0^{\alpha} L^{1-\alpha}. \qquad [1]$$

La cantidad de trabajo que el individuo dedica a la producción es igual en todos los periodos. La producción Y_0 se puede dedicar a dos fines, o bien se consume en el periodo o bien se ahorra y se invierte en capital para la producción del siguiente periodo. Es decir, se tiene que cumplir la siguiente igualdad:

$$Y_0 = C_0 + I_0 \qquad [2]$$

Donde I_0 representa la inversión en el periodo 0 y a través de ella la producción no consumida en el primer periodo se transforma en capital para el siguiente periodo, en concreto asumimos que:

$$K_1 = I_0 + (1 - \delta_K) K_0 \qquad [3]$$

Donde δ_K es la tasa de depreciación sufrida por el capital debido al paso del tiempo. La producción en el periodo t=1 viene dada por $Y_1 = AK_1^{\alpha} L^{1-\alpha}$ y de nuevo se puede dedicar a dos fines, el consumo C_1 o la inversión I_1. Si asumimos que la depreciación es total, δ_K =1, obtenemos que $K_2 = I_1$.

La forma en la que el individuo elige la cantidad consumida en cada periodo es a través de una función de utilidad agregada para los dos periodos,

$$U(C_0, C_1) = u(C_0) + \beta u(C_1) \qquad [4]$$

Donde $u(\cdot)$ es una función C^2 con derivadas $u'(\cdot) > 0$ y $u''(\cdot) < 0$, es decir, estrictamente creciente y estrictamente cóncava. El parámetro β indica la preferencia temporal del individuo de forma que el consumo presente es preferido al consumo futuro y por lo tanto $0 < \beta < 1$.

Por tanto, el problema de elección del individuo viene dado por el siguiente problema de maximización:

$$\max_{C_0,C_1} \{u(C_0) + \beta u(C_1)\}$$
$$s.a. \quad Y_0 = F(K_0, L)$$
$$Y_1 = F(K_1, L)$$
$$Y_0 = C_0 + I_0$$
$$Y_1 = C_1 + I_1$$
$$K_1 = I_0$$

[5]

Antes de resolver el problema del individuo es necesario discutir que ocurre con la inversión del segundo periodo. Si $I_1 > 0$ el capital en t=2 será positivo, pero dado que el individuo solo vive dos periodos esto no es óptimo, ya que podría incrementar su utilidad en t=1 simplemente reduciendo la cantidad dedicada a la inversión I_1. Por lo tanto, impondremos la condición de transversalidad $K_2 = 0$, o lo que es lo mismo $I_1 = 0$, que implica $C_1 = Y_1 = F(K_1, L)$. Con esta condición podemos simplificar el problema de maximización, para obtener:

$$\max_{C_0,C_1} \{u(C_0) + \beta u[F(F(K_0, L) - C_0, L)]\} \qquad [6]$$

Para hallar la solución debemos construir el langragiano:

$$L = u(C_0) + \beta u(C_1) + \lambda_0 [F(K_0, L) - C_0 - K_1] + \lambda_1 [F(K_1, L) - C_1] \qquad [7]$$

Las condiciones de primer orden de este problema son:

$$C_0: \qquad u'(C_0) - \lambda_0 = 0 \qquad [8]$$

$C_1: \quad \beta u'(C_1) - \lambda_1 = 0$ [9]

$K_1: \quad -\lambda_0 + \lambda_1 F_K'(K_1, L) = 0$ [10]

$\lambda_0: \quad F(K_0, L) - C_0 - K_1 = 0$ [11]

$\lambda_1: \quad F(K_1, L) - C_1 = 0$ [12]

De las condiciones de primer orden [8] – [10] obtenemos:

$$u'(C_0) = \lambda_0$$

$$\beta u'(C_1) = \lambda_1 = \frac{\lambda_0}{F_K'(K_1, L)}$$

Dividiendo, tenemos que:

$$\frac{u'(C_0)}{\beta u'(C_1)} = F_K'(K_1, L) \qquad [13]$$

Esta ecuación es conocida como la **Ecuación de Euler** y establece que el ratio de las utilidades marginales entre dos periodos tiene que ser igual a la productividad marginal del capital entre esos mismos periodos. Por tanto, en el óptimo, la pérdida de utilidad ocasionada al renunciar a una unidad de consumo hoy tiene que ser igual a la utilidad generada en el futuro por una unidad más de inversión en capital físico.

Cabe destacar que la condición de transversalidad no es solo una condición que nos garantiza la optimalizad de la solución, ya que el individuo no obtiene ninguna utilidad si deja capital una vez han transcurrido los dos periodos en que vive, sino que también es necesaria para garantizar la unicidad de la solución. La razón es que la solución de nuestro modelo está determinada por un valor concreto para las variables C_0, C_1, K_1 y Y_1.[1] Para hallar el valor de estas variables disponemos de la ecuación de Euler, junto con las dos siguientes:

$$K_1 = AK_0^{\alpha} L^{1-\alpha} - C_0 \qquad [14]$$

$$Y_1 = F(K_1, L) = AK_1^{\alpha} L^{1-\alpha} \qquad [15]$$

[1] Podemos prescindir de I_0 y de I_1 ya que $I_0 = Y_0 - C_0$ y análogamente $I_1 = Y_1 - C_1$.

Así pues, necesitamos una ecuación más para que nuestro sistema esté determinado, que es la condición de transversalidad $K_2 = 0$, es decir, $F(K_1, L) = C_1$.

Por lo tanto, la solución viene dada por las ecuaciones [13] a [15], junto con la condición de transversalidad.

Un modelo de elección intertemporal con un número finito de periodos:

Ahora vamos a considerar el modelo de la sección anterior generalizado a un número finito pero indeterminado de periodos. Como en el caso anterior, el individuo obtiene utilidad de la cantidad consumida en cada uno de los periodos,

$$\sum_{t=0}^{T} \beta^t u(C_t) = u(C_0) + \beta u(C_1) + \beta^2 u(C_2) + ... + \beta^T u(C_T) \text{ .} \qquad [16]$$

Además, el individuo posee una riqueza inicial K_0, y de la misma forma que anteriormente, en cada uno de los periodos debe elegir entre consumir y ahorrar/invertir para el siguiente periodo. Así tenemos que en el periodo t=0 está sujeto a las siguientes restricciones:

$$Y_0 = F(K_0, L) = C_0 + I_0 \qquad [17]$$

$$K_1 = I_0 + (1 - \delta_K) K_0 \qquad [18]$$

De la misma forma, en t=1,

$$Y_1 = F(K_1, L) = C_1 + I_1 \qquad [19]$$

$$K_2 = I_1 + (1 - \delta_K) K_1 \qquad [20]$$

Y así sucesivamente hasta el último periodo

$$Y_T = F(K_T, L) = C_T + I_T \qquad [21]$$

$$K_{T+1} = I_T + (1-\delta_K)K_T \quad [22]$$

En este caso la condición de transversalidad es $K_{T+1} = 0$ y podemos definir el problema de maximización del individuo como:

$$\max_{\{C_t, I_t\}_{t=0}^{T}} \sum_{t=0}^{T} \beta^t u(C_t)$$
$$s.a. \quad Y_t = F(K_t, L) = C_t + I_t$$
$$K_{t+1} = I_t + (1-\delta_K)K_t \quad [23]$$
$$\forall t = 0,...,T$$

Dado K_0 y $K_{T+1} = 0$

Para hallar la solución de este problema debemos construir el langragiano,

$$L = \sum_{t=0}^{T} \left\{ \beta^t u(C_t) + \lambda_t \left[F(K_t, L) - C_t + (1-\delta_K)K_t - K_{t+1} \right] \right\} \quad [24]$$

[2]

Las condiciones de primer orden de este problema son:

$$C_t: \quad \beta^t u'(C_t) = \lambda_t \quad [25]$$
$$K_{t+1}: \quad \lambda_t = \lambda_{t+1}\left[F_K'(K_{t+1}, L) + (1-\delta_K) \right] \quad [26]$$
$$\lambda_t: \quad F(K_t, L) = C_t + K_{t+1} - (1-\delta_K)K_t \quad [27]$$

Despejando λ_t de las dos primeras ecuaciones podemos obtener la ecuación de Euler,

$$\frac{u'(C_t)}{\beta u'(C_{t+1})} = F_K'(K_{t+1}, L) + (1-\delta_K) \quad [28]$$

Que junto con la restricción de recursos,

---

[2] Notar que hemos despejado la variable I_t simplificando las dos restricciones de cada periodo en una sola $F(K_t, L) = C_t + K_{t+1} - (1-\delta_K)K_t$.

$$F(K_t, L) = C_t + K_{t+1} - (1-\delta_K)K_t \qquad [29]$$

Definen la dinámica del sistema a lo largo del tiempo. En un momento concreto del tiempo "t" podemos conocer los valores del sistema en el periodo t+1 si sabemos los valores actuales de C_t y K_t. Por lo tanto, es posible calcular con estas dos ecuaciones la senda de equilibrio del sistema, pero para ello es necesario tener una condición inicial K_0 y una final que en nuestro caso es la condición de transversalidad $K_{t+1} = 0$. La condición inicial K_0 es una condición de partida, sin embargo la condición de transversalidad es una condición de optimalidad, ya que si no se satisface es posible aumentar la utilidad del individuo reduciendo la inversión en el último periodo.[3]

4.2 El modelo de Ramsey

El modelo de Ramsey analiza como deciden las familias cuando pueden determinar la trayectoria de su consumo.

Tal y como se recoge en el capítulo 3 del libro de Sala-i-martín:

"En la vida real, las empresas y los consumidores son instituciones separadas que interaccionan en un lugar que llamamos mercado. Las familias son las propietarias de los activos financieros que dan un rendimiento neto (que puede ser positivo, o negativo en caso de que tengan deudas), y también son propietarias del factor trabajo. Por lo tanto, las familias reciben ingresos tanto del sector financiero (rendimiento de los activos financieros) como de su trabajo, y deciden que parte de esos ingresos utilizar para el consumo y que parte deben ahorrar.

Por su parte, las empresas alquilan trabajo a cambio de un salario, alquilan capital a cambio de una tasa de alquiler y venden su producto a cambio de un precio. Al final, las familias y las empresas se encuentran en el mercado, y los precios del capital, del trabajo y del producto son

[3] En el modelo con un número finito de periodos la condición de transversalidad implica que para tener stocks de capital positivos es necesario que $\delta_K = 1$ ya que, si no hay depreciación total, con un stock de capital positivo nunca se satisfaría $K_{t+1} = 0$.

tales que los tres mercados se equilibran. Este modelo de equilibrio general se debe a Ramsey (1928) y, posteriormente, fue perfeccionado por Cass (1965) y Koopmans (1965).”

El modelo neoclásico de crecimiento o Modelo de Ramsey no es nada más que una generalización del modelo de elección intertemporal con la única diferencia de que se considera un número infinito de periodos. Por lo tanto, el problema de elección del individuo se formula de forma similar, incrementando el número de periodos de T a ∞ y tenemos que

$$\max_{\{C_t\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(C_t)$$

$$s.a. \quad F(K_t, L) = C_t + K_{t+1} - (1-\delta_K)K_t \qquad [30]$$

$$\forall t = 0, \ldots, \infty$$

Dado K_0 y $\lim_{t\to\infty}\left(\frac{\lambda_t}{\lambda_0} K_{t+1}\right) = 0$

El langragiano es ahora

$$L = \sum_{t=0}^{\infty} \left\{ \beta^t u(C_t) + \lambda_t \left[F(K_t, L) - C_t + (1-\delta_K)K_t - K_{t+1} \right] \right\} \qquad [31]$$

Y por lo tanto las condiciones de primer orden son las mismas que para el modelo con T periodos. Análogamente, la dinámica del sistema está también determinada por las mismas dos ecuaciones

$$\frac{u'(C_t)}{\beta u'(C_{t+1})} = F_K'(K_{t+1}, L) + (1-\delta_K) \qquad [32]$$

$$F(K_t, L) = C_t + K_{t+1} - (1-\delta_K)K_t \qquad [33]$$

La diferencia más importante al considerar un número infinito de periodos es que la condición de transversalidad no puede imponer que el capital sea cero en un periodo concreto. Por esta razón, la condición de transversalidad incluida en el problema de maximización con infinitos periodos establece que el valor presente del capital a medida que nos alejamos del momento inicial tienda a cero. Dicho en otras palabras, en un problema de optimización con restricciones el multiplicador λ_t representa el valor de aumentar en una unidad el stock de capital en el óptimo, y por lo tanto el valor de K_{t+1} en el momento t=0 es $\left(\frac{\lambda_t}{\lambda_0}\right)K_{t+1}$. Este valor debe tender a cero a medida que t crece. Para verlo con mayor claridad vayamos a las condiciones de primer orden, de la ecuación de Euler tenemos que para el periodo t se cumple

$$\frac{\beta u'(C_t)}{u'(C_{t-1})} = \frac{\lambda_t}{\lambda_{t-1}} = \left[F_K'(K_{t+1}, L) + (1-\delta_K)\right]^{-1}$$

Calculando esta misma condición para los periodos t-1, t-2,…1 y sustituyendo obtenemos

$$\frac{\beta^t u'(C_t)}{u'(C_0)} = \frac{\lambda_t}{\lambda_0} = \left[F_K'(K_t, L) + (1-\delta_K)\right]^{-1}\left[F_K'(K_{t-1}, L) + (1-\delta_K)\right]^{-1} \ldots \left[F_K'(K_1, L) + (1-\delta_K)\right]^{-1}$$

Si definimos el factor de descuento entre el periodo t y t-1 como $1+R_t$ tenemos que

$$\frac{1}{1+R_t} = \frac{1}{\left[F_K'(K_t, L) + (1-\delta_K)\right]}$$

Y por lo tanto

$$\frac{\lambda_t}{\lambda_0}K_{t+1} = \frac{1}{1+R_t}\frac{1}{1+R_{t-1}}\ldots\frac{1}{1+R_1}K_{t+1}$$

Que no es nada más que el valor descontado al presente del capital en el periodo t+1. De las condiciones de primer orden se puede obtener una segunda forma de escribir la condición de transversalidad

$$\lim_{t\to\infty}\left(\beta^{t}\frac{u'(C_t)}{u'(C_0)}K_{t+1}\right)=0$$

4.2.1 El estado estacionario

La dinámica del modelo de Ramsey está determinada por dos variables C_t y K_t, y por dos ecuaciones [32] y [33]. Definimos el estado estacionario como aquel estado del sistema en el que las dos variables permanecen constantes a lo largo del tiempo, es decir $C_t = C_{t+1} = C^*$ y $K_t = K_{t+1} = K^*$ para todo t. Si imponemos estas dos condiciones a las ecuaciones [32] y [33] podemos calcular los valores del consumo y del capital en el estado estacionario. Sustituyendo condición de estado estacionario en la ecuación de Euler [32] obtenemos

$$\frac{1}{\beta}=F'_K(K^*,L)+(1-\delta_K)$$

De donde podemos calcular el valor de K^* con ayuda de la función de producción $F(K_t,L)=AK_t^{\alpha}L^{1-\alpha}$,

$$F'(K^*,L)=\alpha AK^{*\alpha-1}L^{1-\alpha}\Rightarrow\frac{1}{\beta}=\alpha AK^{*\alpha-1}L^{1-\alpha}+(1-\delta_K)$$

$$\alpha AK^{*\alpha-1}L^{1-\alpha}=\frac{1}{\beta}-(1-\delta_K)$$

$$K^*=\left[\left(\frac{1}{\beta}-1+\delta_K\right)\frac{1}{\alpha A}\right]^{\frac{1}{\alpha-1}}L \qquad [34]$$

Para hallar el valor de C^* utilizamos [34] y la restricción de recursos [33] que en el estado estacionario simplifica a

$$F(K^*,L)=C^*+\delta_K K^*,$$

Utilizando esta última expresión, junto con la del capital de estado estacionario [34] obtenemos el consumo en estado estacionario, de la siguiente forma

$$C^* = F(K^*, L) - \delta_K K^* = AK^{*\alpha} L^{1-\alpha} - \delta_K K^* = K^* \left[AK^{\alpha-1} L^{1-\alpha} - \delta_K \right]$$

$$C^* = \left[\left(\frac{1}{\beta} - 1 + \delta_K \right) \frac{1}{\alpha} - \delta_K \right] \left[\left(\frac{1}{\beta} - 1 + \delta_K \right) \frac{1}{\alpha A} \right]^{\frac{1}{\alpha-1}} L \quad [35]$$

Una vez calculados los valores de las variables del modelo podemos calcular la tasa de ahorro en el estado estacionario. Al ser nuestro modelo una economía cerrada, el ahorro es igual a la inversión y podemos definir la tasa de ahorro como el ratio $s^* = I^* / Y^*$. Dado que $I^* = F(K^*, L) - C^*$ y que $F(K^*, L) - C^* = \delta_K K^*$ obtenemos que

$$s^* = \frac{\delta_K K^*}{Y^*} = \frac{\delta_K}{AK^{*\alpha-1} L^{1-\alpha}} \Rightarrow \qquad s^* = \frac{\delta_K \alpha}{\frac{1}{\beta} - 1 + \delta_K} \quad [36]$$

En [36] se puede observar que α y el factor de descuento β tienen un efecto positivo sobre la tasa de ahorro. El efecto de la tasa de depreciación δ_K resulta más difícil de determinar, para ello hay que calcular la derivada de la tasa de ahorro con respecto a la tasa de depreciación, si lo hacemos obtenemos que $\frac{\partial s^*}{\partial \delta_K} > 0$. En términos de eficiencia, es posible comparar la tasa de ahorro en el modelo de Ramsey con la regla de oro del modelo de Solow, $s^*_{Solow} = \alpha$. Es fácil comprobar en [36] que $s^*_{Ramsey} < s^*_{Solow}$ ya que β y δ_K son positivos y menores que la unidad, y por lo tanto $\frac{\delta_K}{\frac{1}{\beta} - 1 + \delta_K} < 1$.

4.2.2 Dinámica de transición

La solución del sistema dinámico [32]-[33] son dos funciones que nos dan la evolución de las variables C_t y K_t a lo largo del tiempo dada una condición inicial K_0. Como la función de producción $F(K_t, L)$ y la de utilidad $u(C_t)$ no son en general funciones lineales, no va a ser posible encontrar una solución analítica para la dinámica del sistema en la mayoría de los casos. Sin embargo, para ilustrar mejor el problema vamos a presentar un ejemplo con funciones sencillas para el que si es posible expresar analíticamente la senda de equilibrio del sistema.

Supongamos que nuestra función de utilidad es $u(C_t) = \ln(C_t)$, nuestra función de producción es $F(K_t, L) = K_t^{\alpha} L^{1-\alpha}$ y que $\delta_K = 1$. Para este ejemplo concreto se puede demostrar que las sendas de equilibrio del sistema [32]-[33] vienen dadas por

$$K_{t+1} = \alpha\beta K_t^{\alpha} L^{1-\alpha} \qquad [37]$$

$$C_t = (1-\alpha\beta) K_t^{\alpha} L^{1-\alpha} \qquad [38]$$

Para demostrar que [37]-[38] describen la senda de equilibrio del sistema basta con verificar que satisfacen [32]-[33] y la condición de transversalidad. Por último, también se puede demostrar que la tasa de ahorro en este ejemplo es constante en todos los periodos,

$$s_t = \frac{I_t}{Y_t} = \frac{Y_t - C_t}{Y_t} = \frac{Y_t - (1-\alpha\beta Y_t)}{Y_t} = \alpha\beta . \qquad [39]$$

4.3 Equilibrio competitivo y asignaciones eficientes

Hasta ahora hemos considerado el problema de un individuo representativo que posee unos recursos y que intenta maximizar su utilidad agregada sujeto a dichos recursos y a unas restricciones técnicas dadas por la función de producción y la restricción de recursos. En otras palabras, el problema resuelto en las secciones anteriores ha consistido en calcular las asignaciones eficientes o los óptimos de Pareto. En esta sección vamos a ir un paso más adelante y discutiremos los posibles equilibrios competitivos cuando consideramos la existencia de mercados con precios en los que se pueden intercambiar los bienes. También analizaremos la relación entre las soluciones competitivas y las asignaciones eficientes. De forma genérica, la relación entre las asignaciones eficientes y los equilibrios competitivos la establecen los dos teoremas de la economía del bienestar que enunciamos a continuación.

PRIMER TEOREMA DE LA ECONOMIA DEL BIENESTAR: *Todo equilibrio competitivo es una asignación eficiente (óptimo de Pareto), siempre que no existan distorsiones tales como impuestos o externalidades.*

SEGUNDO TEOREMA DE LA ECONOMIA DEL BIENESTAR: *Para cada asignación eficiente (OP) existe un sistema de precios y de condiciones iniciales que las hace un equilibrio competitivo, supuesto que no existen distorsiones.*

El problema de encontrar las asignaciones eficientes (OP) también es denominado a veces como el problema del Planificador Social, ya que se puede interpretar como el problema de elección de un planificador social benevolente que intenta maximizar el bienestar social. Una condición necesaria para resolver el problema del planificador social es que la asignación escogida sea eficiente, ya que en caso contrario sería posible aumentar el bienestar de algún individuo sin perjudicar a otro.

De esta forma asumimos que hay un gran número de familias idénticas que viven un número infinito de periodos. Las familias poseen todo el capital y el trabajo y además son las dueñas de las empresas, por lo tanto reciben todos los beneficios. Por simplicidad designamos a una de estas familias como la familia representativa y dado que todas ellas se comportan de la misma forma utilizaremos a esta familia para hallar el equilibrio competitivo. La cantidad de factor trabajo es constante e igual a L y la población está normalizada a 1. La restricción presupuestaria de la familia representativa es

$$C_t + I_t = w_t L + r_t K_t + \pi_t \qquad [40]$$

Donde w_t representa el salario por unidad de trabajo, r_t el pago por el alquiler de una unidad de capital y π_t son los beneficios empresariales recibidos en el periodo t. Los precios han sido normalizados de forma que el precio del consumo y de la inversión son iguales a 1. El stock de capital evoluciona de acuerdo a la ley de movimiento,

$$K_{t+1} = I_t + (1-\delta_K)K_t . \qquad [41]$$

En esta economía existe un número muy grande de empresas idénticas que se comportan de forma similar y por ello en nuestro análisis utilizaremos una sola empresa que llamaremos empresa representativa. La función de beneficios de la empresa representativa es

$$\pi_t = Y_t - w_t L - r_t K_t . \quad [42]$$

En cuanto a la función de utilidad $u(\cdot)$ asumimos que posee las mismas propiedades que en la sección anterior. La función de producción $Y_t = F(K_t, L)$ cumple que $F_K^{'}(\cdot) > 0$, $F_L^{'}(\cdot) > 0$, $F_K^{''}(\cdot) < 0$ y las condiciones de Inada,

$$\lim_{K \to 0} F_K^{'}(K, L) = \infty \quad [43]$$
$$\lim_{K \to \infty} F_K^{'}(K, L) = 0 \quad [44]$$

DEFINICIÓN: *Un equilibrio competitivo para esta economía es una secuencia de cantidades* $\{C_t, I_t, K_t, Y_t\}_{t=0}^{\infty}$ *tal que dada la secuencia de precios* $\{w_t, r_t\}_{t=0}^{\infty}$ *se cumple que:*

a) Dado K_0 *la familia representativa elige una secuencia para* C_t *y* I_t *que resuelve su problema de maximización,*

$$\max_{\{C_t, I_t\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(C_t)$$
$$s.a. \quad C_t + I_t = w_t L + r_t K_t + \pi_t \quad [45]$$
$$K_{t+1} = I_t + (1 - \delta_K) K_t$$
$$\forall t = 0, \ldots, \infty$$

Dado K_0 y $\lim_{t \to \infty} \left(\frac{\lambda_t}{\lambda_0} K_{t+1} \right) = 0$

b) La empresa escoge una senda para el capital K_t *que maximiza sus beneficios en cada periodo*

$$\max_{\mathrm{K}_t} \{ Y_t - w_t L - r_t \mathrm{K}_t \} \quad [46]$$

c) Los mercados están en equilibrio en cada periodo sin excesos de oferta o demanda,

$$Y_t = C_t + I_t$$
$$\mathrm{K}_t = K_t$$

Para resolver el problema de las familias construimos el langragiano de manera análoga a como lo hicimos en el problema del planificador,

$$L=\sum_{t=0}^{\infty}\left\{\beta^{t}u(C_{t})+\lambda_{t}\left[w_{t}L+r_{t}K_{t}-C_{t}+(1-\delta_{K})K_{t}-K_{t+1}+\pi_{t}\right]\right\}$$

Del cual obtenemos las condiciones de primer orden,

$$C_t: \quad \beta^t u'(C_t)=\lambda_t \qquad [47]$$

$$K_{t+1}: \quad \lambda_t=\lambda_{t+1}\left[r_{t+1}+(1-\delta_K)\right] \qquad [48]$$

$$\lambda_t: \quad K_{t+1}=w_tL+r_tK_t-C_t+(1-\delta_K)K_t+\pi_t \qquad [49]$$

De las condiciones de primer orden del problema de la empresa sabemos que,

$$r_t=F_K'(K_t,L)$$

Y por lo tanto si calculásemos la condición de Euler tenemos

$$\frac{u'(C_t)}{\beta u'(C_{t+1})}=F_K'(K_{t+1},L)+(1-\delta_K) \qquad [50]$$

Que es la misma que en el problema del planificador. La segunda ecuación que define la dinámica del sistema es la restricción presupuestaria de la familia [45]. Sin embargo, por el Teorema de Euler,[4] y dado que en general asumimos que la función de producción $F(K_t,L)$ tiene rendimientos constantes a escala, sabemos que $Y_t=w_tL+r_tK_t$.[5] Esto implica que la restricción presupuestaria de la familia en el equilibrio es equivalente a [29] y por lo tanto la dinámica de la economía en el equilibrio competitivo está definida por el sistema [28]-[29], al igual que en el caso del problema del planificador. Se verifica de esta forma el primer teorema del bienestar y que la solución competitiva de una economía sin distorsiones es eficiente.

[4] El teorema de Euler para una función $g(x,y)$ homogénea de grado 1 establece que $g(x,y)=\frac{\partial g(x,y)}{\partial x}x+\frac{\partial g(x,y)}{\partial y}y$.

[5] Lo que además implica que los beneficios son cero.

4.4 Impuestos en el modelo de Ramsey

En la sección anterior hemos estudiado el equilibrio competitivo de una economía sin distorsiones y hemos comprobado que la solución coincide con la que se obtendría del problema del Planificador. En esta sección vamos a estudiar dos ejemplos de economías en las que existen impuestos distorsionadores y vamos a evaluar cómo afecta la existencia de dichos impuestos al equilibrio competitivo.

4.4.1 Impuestos sobre la renta

En este primer ejemplo vamos a asumir que las familias pagan un impuesto τy sobre las rentas procedentes del capital y del trabajo. La restricción presupuestaria de las familias es por consiguiente

$$C_t + I_t = (1-\tau y)(w_t L + r_t K_t) + TR_t \quad [51]$$

En esta economía la recaudación del gobierno es $\tau y(w_t L + r_t K_t)$. El gobierno sin embargo no dedica ese dinero a ningún fin productivo y lo que hace con él es devolverlo a los ciudadanos en forma de transferencias $TR_t = \tau y(w_t L + r_t K_t)$. No obstante, los individuos toman las transferencias como dadas y no las introducen en su restricción presupuestaria a la hora de resolver su problema de maximización. El problema de maximización de la familia es ahora,

$$\max_{\{C_t, I_t\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(C_t)$$

$$s.a. \quad C_t + I_t = (1-\tau y)(w_t L + r_t K_t) + TR_t \quad [52]$$

$$K_{t+1} = I_t + (1-\delta_K)K_t$$

$$\forall t = 0,\dots,\infty$$

Dado K_0 y $\lim_{t\to\infty}\left(\frac{\lambda_t}{\lambda_0}K_{t+1}\right) = 0$

Que tiene asociado el siguiente langragiano,

$$L = \sum_{t=0}^{\infty} \left\{\beta^t u(C_t) + \lambda_t \left[(1-\tau y)(w_t L + r_t K_t) - C_t + (1-\delta_K)K_t - K_{t+1} + TR_t\right]\right\}$$

Resolviendo las condiciones de primer orden

$$C_t: \quad \beta^t u'(C_t) = \lambda_t \qquad [53]$$
$$K_{t+1}: \quad \lambda_t = \lambda_{t+1}\left[(1-\tau y)r_{t+1} + (1-\delta_K)\right] \qquad [54]$$
$$\lambda_t: \quad K_{t+1} = (1-\tau y)(w_t L + r_t K_t) - C_t + (1-\delta_K)K_t + TR_t \qquad [55]$$

Se obtiene la condición de Euler,

$$\frac{u'(C_t)}{\beta u'(C_{t+1})} = (1-\tau y)F_K'(K_{t+1}, L) + (1-\delta_K) \qquad [56]$$

Para obtener esta ecuación hemos utilizado la condición de primer orden del problema de la empresa $r_t = F_K'(K_{t+1}, L)$, que es la misma que en el caso sin impuestos debido a que los impuestos sobre la renta solo distorsionan el problema de la familia. La dinámica del sistema viene definida por lo tanto por [56] y por la restricción de recursos $F(K_t, L) = C_t + K_{t+1} - (1-\delta_K)K_t$ que es la misma que en el caso sin impuestos, ya que $TR_t = \tau y(w_t L + r_t K_t)$. De [56] se deduce que el comportamiento de la economía se ve afectado por la introducción del impuesto sobre la renta ya que distorsiona el ratio de las utilidades marginales del consumo.

La presencia de impuestos distorsionadores también va a afectar al valor de las variables en estado estacionario. Si imponemos las condiciones de estado estacionario $C_t = C_{t+1} = C^*$ y $K_t = K_{t+1} = K^*$ al sistema formado por,

$$\frac{u'(C_t)}{\beta u'(C_{t+1})} = (1-\tau y)F_K'(K_{t+1}, L) + (1-\delta_K) \qquad [57]$$

$$F(K_t, L) = C_t + K_{t+1} - (1-\delta_K)K_t \qquad [58]$$

La ecuación que determina el capital en el estado estacionario es

$$\frac{1}{\beta} = (1-\tau y)F_K'(K^*, L) + (1-\delta_K) \qquad [59]$$

Y despejando la productividad marginal del capital,

$$F_K^{\prime}(K^*, L) = \left[\frac{1}{\beta} - 1 + \delta_K\right]\frac{1}{1-\tau y} \qquad [60]$$

Lo que implica que, si la función de producción tiene productividad marginal decreciente, una tasa impositiva $\tau y > 0$ conlleva una cantidad menor de capital en el estado estacionario, $K_{\tau Y}^* < K^*_{Ramsey}$.

Suponiendo una función de producción $F(K_t, L) = AK_t^{\alpha} L^{1-\alpha}$,

$$F^{\prime}(K^*, L) = \alpha AK^{*\alpha-1}L^{1-\alpha} \Rightarrow \frac{1}{\beta} = (1-\tau y)\alpha AK^{*\alpha-1}L^{1-\alpha} + (1-\delta_K)$$

$$(1-\tau y)\alpha AK^{*\alpha-1}L^{1-\alpha} = \frac{1}{\beta} - (1-\delta_K)$$

$$K^* = \left[\left(\frac{1}{\beta} - 1 + \delta_K\right)\frac{1}{(1-\tau y)\alpha A}\right]^{\frac{1}{\alpha-1}} L \; .$$

Por lo tanto, se cumple que el capital en estado estacionario es inferior cuando se considera un impuesto sobre la renta.

En lo que respecta a la tasa de ahorro en el estado estacionario tenemos que ahora es,

$$s^* = \frac{\delta_K \alpha}{\left[\frac{1}{\beta} - 1 + \delta_K\right]\frac{1}{1-\tau y}} \qquad [61]$$

Si comparamos la tasa de ahorro del modelo sin impuestos con la del modelo con impuestos es fácil deducir que $s_{\tau y}^* < s^*_{Ramsey}$.

4.4.2 Impuestos sobre el consumo y la inversión

En esta sección vamos a asumir que las familias tienen que pagar un impuesto τ_I por cada unidad de inversión que compran y un impuesto τ_C por cada unidad de bien que consumen. La restricción presupuestaria de estas familias queda de la siguiente forma,

$$(1+\tau_C)C_t+(1+\tau_I)I_t=w_tL+r_tK_t+TR_t \qquad [62]$$

Siendo la recaudación del gobierno $TR_t=\tau_C C_t+\tau_I I_t$. El problema de maximización de la familia se puede representar como,

$$\begin{aligned}&\max_{\{C_t,I_t\}_{t=0}^{\infty}}\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t u(C_t)\\ &s.a.\quad (1+\tau_C)C_t+(1+\tau_I)I_t=w_tL+r_tK_t+TR_t \qquad [63]\\ &K_{t+1}=I_t+(1-\delta_K)K_t\\ &\forall t=0,\dots,\infty\\ &\text{Dado } K_0 \text{ y } \lim_{t\to\infty}\left(\frac{\lambda_t}{\lambda_0}K_{t+1}\right)=0\end{aligned}$$

Que tiene asociado el siguiente langragiano,

$$L=\sum_{t=0}^{\infty}\left\{\beta^t u(C_t)+\lambda_t\left\{\frac{1}{1+\tau_I}\left[w_tL+r_tK_t-(1+\tau_C)C_t+TR_t\right]+(1-\delta_K)K_t-K_{t+1}\right\}\right\}$$

Resolviendo las condiciones de primer orden

$$C_t:\quad \beta^t u'(C_t)=\lambda_t\left(\frac{1+\tau_C}{1+\tau_I}\right) \qquad [64]$$

$$K_{t+1}:\quad \lambda_t=\lambda_{t+1}\left[\frac{1}{1+\tau_I}r_{t+1}+(1-\delta_K)\right] \qquad [65]$$

$$\lambda_t:\quad K_{t+1}=\frac{1}{1+\tau_I}\left[w_tL+r_tK_t-(1+\tau_C)C_t+TR_t\right]+(1-\delta_K)K_t \qquad [66]$$

Y sustituyendo se obtiene la ecuación de Euler que ahora viene representada por la siguiente expresión:

$$\frac{u'(C_t)}{\beta u'(C_{t+1})} = \frac{1}{1+\tau_I} F_K'(K_{t+1}, L) + (1-\delta_K) \qquad [67]$$

La dinámica del sistema viene dada por la ecuación de Euler, junto con

$$F(K_t, L) = C_t + K_{t+1} - (1-\delta_K)K_t \qquad [68]$$

Es importante notar que los impuestos sobre el consumo no afectan a la elección de los consumidores. Esto es debido a que la elección renta-ocio no está presente en nuestro modelo, si hubiera ocio en la función de utilidad sí que podría afectar dependiendo de la función de utilidad considerada. En cuanto a los impuestos sobre la inversión se puede observar que afectan en la dirección esperada. Imponiendo la condición de estado estacionario,

$$\frac{1}{\beta} = \frac{1}{1+\tau_I} F_K'(K^*, L) + (1-\delta_K) \qquad [69]$$

Obtenemos la siguiente expresión correspondiente a la productividad marginal del capital:

$$F_K'(K^*, L) = \left[\frac{1}{\beta} - 1 + \delta_K\right](1+\tau_I) \qquad [70]$$

De este modo, podemos concluir que a mayor τ_I menos capital en el estado estacionario.

Suponiendo una función de producción $F(K_t, L) = AK_t^{\alpha} L^{1-\alpha}$,

$$F'(K^*, L) = \alpha AK^{*\alpha-1} L^{1-\alpha} \Rightarrow \frac{1}{\beta} = \frac{1}{1+\tau_I} \alpha AK^{*\alpha-1} L^{1-\alpha} + (1-\delta_K)$$

$$\frac{1}{1+\tau_I} \alpha AK^{*\alpha-1} L^{1-\alpha} = \frac{1}{\beta} - (1-\delta_K)$$

$$K^{*}=\left[\left(\frac{1}{\beta}-1+\delta_{K}\right)\frac{(1+\tau_{I})}{\alpha A}\right]^{\frac{1}{\alpha-1}}L$$

Por lo tanto, se cumple que el capital en estado estacionario es inferior cuando se considera un impuesto sobre la inversión.

Por su parte, también observamos una reducción en la tasa de ahorro,

$$s^{*}=\frac{\delta_{K}\alpha}{\left[\frac{1}{\beta}-1+\delta_{K}\right](1+\tau_{I})} \qquad [71]$$

4.5 Gasto público. Imposición optima

Hasta ahora hemos considerado que los impuestos no se utilizan para financiar ningún tipo de gasto público y simplemente distorsionan la decisión de los individuos, siendo devueltos por medio de transferencias. En esta sección vamos a introducir el gasto público productivo en nuestro modelo a través de la función de producción. El gasto público, G_t, va a ser financiado a través de impuestos que distorsionan la decisión de los agentes, pero al contrario que anteriormente van a tener una contribución positiva a la producción agregada de la economía. Podemos entender G_t como servicios necesarios para la sociedad que no son suministrados por el sector privado (policía, justicia, educación…). En general vamos a asumir que G_t es un bien no rival y que no está sujeto a congestión y por lo tanto el hecho de que una empresa/individuo lo use no impide que lo usen los demás. La función de producción considerada va a ser:

$$Y_t = AK_t^{\alpha}L^{\phi}G_t^{1-\alpha-\phi} \qquad [72]$$

Antes de hallar la solución de Mercado de este modelo vamos a calcular la asignación eficiente con el objeto de tener una referencia para valorar las posibles tasas impositivas. La primera diferencia con el modelo neoclásico de crecimiento ya estudiado es que la restricción de recursos debe incluir G_t y es ahora,

$$C_t + I_t + G_t = Y_t$$

Que unida a la restricción de recursos $K_{t+1} = I_t + (1-\delta_K)K_t$ y despejando I_t implica que

$$K_{t+1} = Y_t - C_t - G_t + (1-\delta_K)K_t . \quad [73]$$

El problema del planificador social se puede representar de la siguiente manera,

$$\max_{\{C_t,G_t\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(C_t)$$
$$s.a. \quad K_{t+1} = Y_t - C_t - G_t + (1-\delta_K)K_t \quad [74]$$
$$C_t, G_t \geq 0$$
$$\forall t = 0,\dots,\infty$$

Dado K_0 y $\lim_{t\to\infty}\left(\frac{\lambda_t}{\lambda_0}K_{t+1}\right) = 0$

Contruyendo el langragiano del problema se obtiene,

$$L = \sum_{t=0}^{\infty}\left\{\beta^t u(C_t) + \lambda_t\left[Y_t - C_t - G_t + (1-\delta_K)K_t - K_{t+1}\right]\right\}$$

En este caso tenemos una condición de primer orden más ya que hay una variable de decisión más, el gasto público G_t. Las condiciones de primer orden de este problema son:

$$C_t: \quad \beta^t u'(C_t) = \lambda_t \quad [75]$$
$$G_t: \quad \frac{\partial Y_t}{\partial G_t} = 1 \quad [76]$$
$$K_{t+1}: \quad \lambda_t = \lambda_{t+1}\left[F_K'(K_{t+1}, L) + (1-\delta_K)\right] \quad [77]$$
$$\lambda_t: \quad Y_t = C_t + G_t + K_{t+1} - (1-\delta_K)K_t \quad [78]$$

Utilizando las condiciones de primer orden e imponiendo la condición de estado estacionario,

$$F^{\prime}(K^{*},L)=\alpha AK^{*\alpha-1}L^{\phi}G^{1-\alpha-\phi} \Rightarrow \qquad \frac{1}{\beta}=\alpha AK^{*\alpha-1}L^{\phi}G^{1-\alpha-\phi}+(1-\delta_K)$$

$$\left(\frac{1}{\beta}-1+\delta_K\right)\frac{1}{\alpha A}=K^{*\alpha-1}L^{\phi}G^{1-\alpha-\phi}$$

$$\frac{\partial Y_t}{\partial G_t}=1 \qquad \Rightarrow \qquad (1-\alpha-\phi)AK^{*\alpha}L^{\phi}G^{-\alpha-\phi}=1$$

$$K^{*\alpha}L^{\phi}G^{-\alpha-\phi}=\frac{1}{(1-\alpha-\phi)A}$$

Dividiendo ambas expresiones

$$\frac{K^{*\alpha-1}L^{\phi}G^{1-\alpha-\phi}}{K^{*\alpha}L^{\phi}G^{-\alpha-\phi}}=\left(\frac{1}{\beta}-1+\delta_K\right)\frac{(1-\alpha-\phi)}{\alpha}$$

Obtenemos el ratio gasto público-capital en el estado estacionario,

$$\frac{G^{*}}{K^{*}}=\left(\frac{1}{\beta}-1+\delta_K\right)\frac{(1-\alpha-\phi)}{\alpha} \qquad [79]$$

Esta ecuación nos da el ratio gasto público-capital eficiente en el estado estacionario, que utilizaremos cuando hallemos el equilibrio de mercado para calcular los impuestos que maximizan el bienestar social.

El equilibrio competitivo

Para calcular el equilibrio competitivo de esta economía vamos a considerar que hay un impuesto sobre la renta τy que grava el ingreso de las familias proveniente de las rentas del trabajo y el capital. El problema de maximización de la familia representativa viene dado por,

$$\max_{\{C_t, I_t\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(C_t)$$
$$s.a. \quad C_t + I_t = (1-\tau y)(w_t L + r_t K_t) + TR_t \qquad [80]$$
$$K_{t+1} = I_t + (1-\delta_K) K_t$$
$$\forall t = 0, \ldots, \infty$$

Dado K_0 y $\lim_{t\to\infty}\left(\frac{\lambda_t}{\lambda_0} K_{t+1}\right) = 0$

El langragiano y las condiciones de primer orden son los de una economía con un impuesto sobre la renta y por lo tanto la condición de Euler sigue siendo

$$\frac{u´(C_t)}{\beta u´(C_{t+1})} = (1-\tau y) F_K^{´}(K_{t+1}, L) + (1-\delta_K)$$

La diferencia es que ahora en la función de producción G_t está incluido y además se debe cumplir que los ingresos del estado son iguales que sus gastos, es decir $G_t = \tau y(w_t L + r_t K_t) + TR_t$. Por tanto, en estado estacionario tenemos que,

$$\frac{1}{\beta} = (1-\tau y) F_K^{´}(K^*, L) + (1-\delta_K) = (1-\tau y)\alpha A K^{*\alpha-1} L^{\phi} G^{1-\alpha-\phi} + (1-\delta_K)$$
$$\frac{1}{\beta} = \alpha(1-\tau y) Y_t K^{*-1} + (1-\delta_K) = \alpha(1-\tau y)\frac{G^*}{\tau y} K^{*-1} + (1-\delta_K)$$
$$\frac{G^*}{K^*} = \frac{\tau Y}{\alpha(1-\tau y)}\left(\frac{1}{\beta} - 1 + \delta_K\right) \qquad [81]$$

De [81] se deduce que para que el valor de $\frac{G^*}{K^*}$ sea el óptimo definido en [79], se debe cumplir que $\frac{\tau Y}{\alpha(1-\tau y)} = 1-\alpha-\phi$ y por lo tanto la tasa impositiva que maximiza el bienestar social es

$$\tau y = \frac{1-\alpha-\phi}{2-\alpha-\phi} \qquad [82]$$

Anexo: el modelo de Ramsey en tiempo continuo

En esta sección vamos a desarrollar el modelo de Ramsey con variables expresadas en tiempo continuo. Al igual que hicimos con el modelo de Solow, en el modelo de Ramsey la variación de las variables también se puede expresar en tiempo continuo en vez de en discreto. En este caso la suma descontada de la utilidad del individuo representativo estaría representada por,

$$\int_{t=0}^{\infty} e^{-\rho t} u(C_t) \quad [83]$$

Donde ahora el factor de descuento temporal viene representado por $e^{-\rho t}$. De la misma forma que en el modelo de Solow la ley de movimiento del capital físico es un equivalente en tiempo continuo de la ley de movimiento en tiempo discreto,

$$\dot{K}_t = I_t - \delta_K K_t \quad [84]$$

Donde por supuesto la inversión agregada es igual a la producción que no se consume, es decir, $I_t = Y_t - C_t$. La función de producción agregada sigue representada por $Y_t = F(K_t, L)$ conservando todas las propiedades de la función de producción neoclásica. La ley de movimiento del capital se puede expresar por lo tanto como,

$$\dot{K}_t = F(K_t, L) - C_t - \delta_K K_t. \quad [85]$$

Con todas estas consideraciones podemos plantear el problema del planificador de forma análoga al caso con variables en tiempo discreto

$$\max_{\{C_t\}_{t=0}^{\infty}} \int_{t=0}^{\infty} e^{-\rho t} u(C_t)$$

$$s.a. \quad \dot{K}_t = F(K_t, L) - C_t - \delta_K K_t \quad [86]$$

$$\forall t = 0, \ldots, \infty$$

Dado K_0 y $\lim_{t \to \infty} (\lambda_t K_t) = 0$

Debido a que ahora no hay un número contable de periodos no podemos plantear el langragiano que usábamos en el caso discreto. Para resolver este problema de maximización debemos plantear el hamiltoniano, que es equivalente en tiempo continuo al langragiano de tiempo discreto

$$H = e^{-\rho t}u(C_t) + \lambda_t\left[F(K_t, L) - C_t - \delta_K K_t\right] \qquad [87]$$

En este caso las condiciones de primer orden no son exactamente iguales a las de tiempo discreto y dependen de las derivadas del hamiltoniano con respecto al consumo y al capital, es decir

$$C_t: \qquad H_C = e^{-\rho t}u'(C_t) = \lambda_t \qquad [88]$$

$$K_t: \qquad H_K = \lambda_t\left[F_K'(K_t, L) - \delta_K\right] \qquad [89]$$

En el caso continuo la condición de transversalidad viene dada por la expresión $\lim_{t\to\infty}(\lambda_t K_t) = 0$. Tomando logaritmos y derivando con respecto al tiempo en la condición de primer orden (C_t) obtenemos

$$\frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t} = \rho - \frac{1}{\sigma}\frac{\dot{C}_t}{C_t}. \qquad [90]$$

El parámetro σ representa la elasticidad intertemporal de sustitución, $\sigma = -\frac{u_C'}{u_C'' C_t}$, que no es nada más que una medida de la curvatura de la función de utilidad. σ nos indica como de dispuesto está el individuo a traspasar consumo de un periodo a otro. Si la curvatura de la función de utilidad es muy grande el individuo es muy averso al riesgo y va a preferir patrones de consumo estables sin grandes variaciones de la cantidad consumida de un periodo a otro. Si por el contrario la función de utilidad es muy lineal al individuo no le van a afectar excesivamente reducciones en la cantidad consumida en un periodo, siempre que sean compensados por consumos mayores en otros periodos. Utilizando la condición de primer orden K_t obtenemos,

$$\frac{\dot{C}_t}{C_t} = \sigma\left[F_K^{'}(K_t, L) - \delta_K - \rho\right] \qquad [91]$$

Esta ecuación expresa como varía el consumo en función del valor del consumo y el capital en el momento t. La ecuación [91] y la restricción de recursos [85] forman el sistema de ecuaciones diferenciales que definen la dinámica del sistema. Como en el caso del tiempo discreto hay dos variables en el sistema, una variable de control C_t y una variable de estado K_t. El estado estacionario de este sistema dinámico viene definido por los valores del consumo y del capital C^* y K^* para los que se cumple que $\dot{C}_t = \dot{K}_t = 0$. El valor de C^* y K^* lo obtenemos imponiendo las condiciones de estado estacionario al sistema

$$\dot{K}_t = F(K_t, L) - C_t - \delta_K K_t \qquad [92]$$

$$\frac{\dot{C}_t}{C_t} = \sigma\left[F_K^{'}(K_t, L) - \delta_K - \rho\right] \qquad [93]$$

En este caso, de [93] obtenemos directamente el valor de K^*

$$F_K^{'}(K^*, L) = \delta_K + \rho \qquad [94]$$

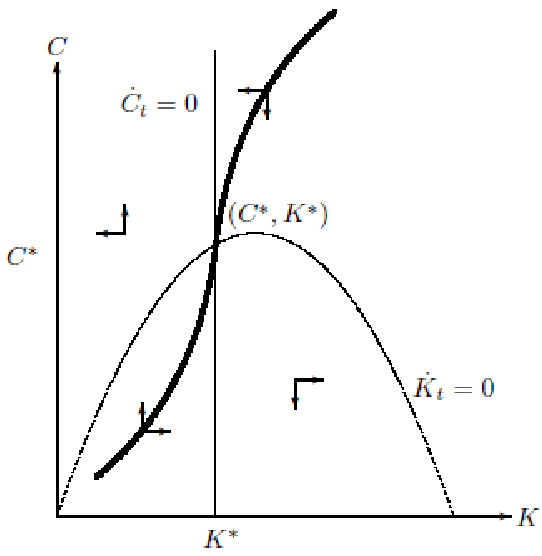
Y con [92] podemos calcular el valor del consumo en el estado estacionario en función de K^*

$$C^* = F(K^*, L) - \delta_K K^* \qquad [95]$$

La ecuación [94] define los puntos del espacio $C-K$ en los que se cumple $\dot{C}_t = 0$, esta ecuación está representada en la figura 1 por la recta $\dot{C}_t = 0$, que como se puede observar es una recta vertical, ya que en [94] solo aparece la variable K^*. De la misma forma la ecuación

[95] define los puntos del espacio en los que $\dot{K}_t = 0$, en la figura 1 está representada por la recta $\dot{K}_t = 0$. Su forma viene determinada por las propiedades de la función de producción, debido a la concavidad de la función de producción la curva $\dot{K}_t = 0$ tiene forma de parábola invertida. Ambas rectas se cortan en el estado estacionario (C^*, K^*). En la figura 1 también se puede observar cómo las ecuaciones [94]-[95] dividen el plano en cuatro regiones, en cada una de estas cuatro regiones las flechas nos indican la dirección en que se mueven las variables C_t y K_t. Es más, la línea de trazo grueso nos indica la dirección desde donde la senda de equilibrio se acerca al estado estacionario (C^*, K^*). Es importante notar que dada una condición lineal K_0, existe una única senda de equilibrio definida por el sistema [94]-[95] que cumple la condición de transversalidad. Se puede demostrar que dicha senda de equilibrio converge al estado estacionario (C^*, K^*) y además es la única senda que lo hace.

Figura 1: Diagrama de fases del modelo de Ramsey



Por esta razón decimos que el estado estacionario es un punto de silla.

El estado estacionario con una función de producción Cobb-Douglas

Supongamos ahora que la función de producción agregada viene dada por la expresión $Y_t = AK_t^{\alpha} L^{1-\alpha}$. En este caso el valor del capital en el estado estacionario se obtiene con la ecuación $F_K^{'}\left(K^*, L\right) = \delta_K + \rho$,

$$K^* = \left[\frac{\delta_K + \rho}{A\alpha}\right]^{\frac{1}{\alpha-1}} L .$$

Si definimos la tasa de ahorro como $s_t = \frac{I_t}{Y_t}$, en el estado estacionario se cumple que

$I^* = \delta_K K^*$ y por lo tanto

$$s^* = \frac{\delta_K}{A\left(K^*\right)^{\alpha-1} L^{1-\alpha}} = \frac{\delta_K \alpha}{\delta_K + \rho}$$