Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MADRID

COOPERA | Programa de Cooperación Educativa de la Universidad Autónoma de Madrid

UAM UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID

Tema 2. El modelo de Solow: La acumulación de capital físico.

Referencias:
- Weil c. 3,4 y 6
- Sala i Martin c. 1 y 2
- Romer c. 1 y 3
- Apuntes de clase

En el presente tema vamos a analizar el impacto de la acumulación de capital físico, capital humano y progreso tecnológico sobre el crecimiento económico, medido como crecimiento del PIB. A su vez, la acumulación de capital depende de cuestiones relacionadas con la geografía, las instituciones los recursos naturales, la suerte, etc…….

2.1 El modelo básico de Solow.

Analizamos el papel del capital (K) en la producción utilizando el concepto de función de producción, que además incorpora trabajo (L) y tecnología (A). Se supone una tecnología capaz de transformar los factores de producción final a través de la siguiente función:

$$Y_t = F(K_t, L_t)$$

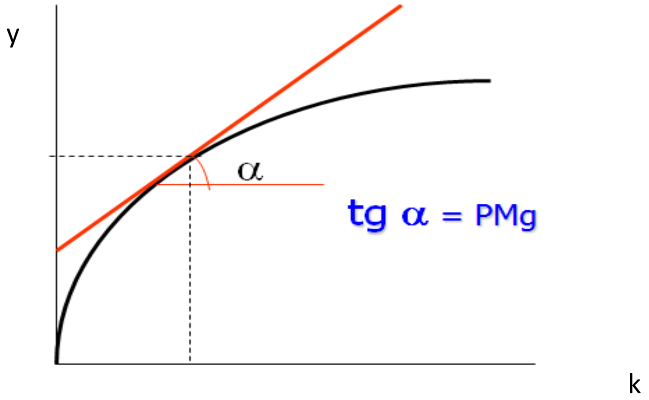
Donde Y_t representa la producción agregada, K_t el capital, y en general todos aquellos factores de producción susceptibles de ser acumulados, y L_t el empleo, que no puede ser acumulado y aumenta a una tasa independiente de las decisiones individuales.

A continuación, se enumeran las propiedades de la función de producción neoclásica:

- Continua y diferenciable
- Creciente
- Presenta rendimientos constantes a escala, es decir F(zK,zL)=zF(K,L). En algunas ocasiones nos puede resultar más interesante analizar la cantidad de producción por trabajador. El hecho de que la función de producción tenga rendimientos constantes a escala implica que la cantidad de producción por trabajador depende solamente de la cantidad de capital por trabajador. Multiplicando en F(K,L) ambos factores por 1/L.

$$y = \frac{Y}{L} = \frac{F(K,L)}{L} = F\left(\frac{K}{L}, \frac{L}{L}\right) = F(k,1) = f(k)$$

Productos marginales decrecientes, lo que implica concavidad en la función de producción.



- Condiciones de INADA

$$\lim_{K \to 0} F'_K(K,L) = +\infty \qquad \lim_{L \to 0} F'_L(K,L) = +\infty$$

$$\lim_{K \to +\infty} F'_K(K,L) = 0 \qquad \lim_{L \to +\infty} F'_L(K,L) = 0$$

Normalmente, se utilizan formas específicas de la función de producción. Algunos ejemplos:

CES : $Y = A(\alpha K^{\rho} + (1-\alpha)L^{\rho})^{1/\rho}$

Función lineal: si ρ =1, $Y = A(\alpha K + (1-\alpha)L)$

Cobb-Douglas: si ρ =0, $Y = A(K^{\alpha} L^{1-\alpha})$

Leontieff: si ρ =-∞, $Y = \min(\alpha K, (1-\alpha)L)$

A continuación, nos vamos a centrar en la función de producción Cobb-Douglas. Se trata de una función de producción que se ajusta bien a los datos sobre los factores y los niveles de producción. La función de producción Cobb-Douglas adopta la forma:

$$Y = A(K^{\alpha} L^{1-\alpha})$$

Donde A mide la productividad, por tanto, manteniendo las cantidades de factores, el nivel de A condiciona al de producción. Así mismo, el término α determina como se combinan el capital y el trabajo para obtener el nivel de producción y hace referencia a la participación del capital en la renta.

Para expresar la función de producción Cobb-Douglas en magnitudes por trabajador, multiplicamos tanto los factores como la producción por 1/L:

$$y = \frac{Y}{L} = A\left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha}\left(\frac{L}{L}\right)^{1-\alpha} = Ak^{\alpha}$$

Pagos a los factores y participaciones de los factores en la renta

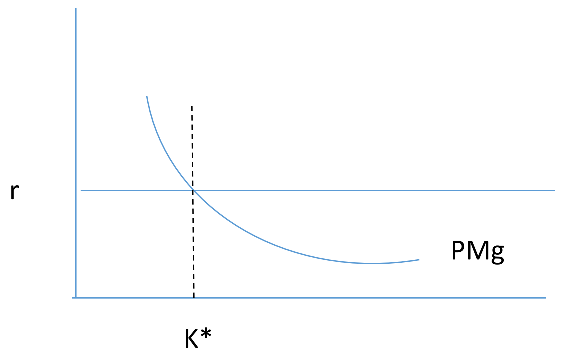
Vamos a suponer competencia perfecta, por lo que las empresas son precio-aceptantes, el número de agentes muy elevado y la información es perfecta.

Las empresas maximizan beneficios, por lo que:

$$Max\Pi = F(K,L) - wL - rK$$

CPO: $\frac{\partial F(K,L)}{\partial K} = r \quad \frac{\partial F(K,L)}{\partial L} = w$

Por tanto, el pago de los factores se corresponde con su productividad marginal.



En el caso de una función de producción de tipo Cobb-Douglas:

$$PMg_K = \alpha AK^{\alpha-1}L^{1-\alpha}$$

$$PMg_L = (1-\alpha)AK^{\alpha}L^{-\alpha}$$

La participación del capital y el empleo en la renta es la proporción de renta nacional (Y) que se paga en concepto de alquiler del capital y contratación de un empleado, respectivamente. En términos matemáticos:

Capital: $\frac{PMg_K}{Y}$

Trabajo: $\frac{PMg_L}{Y}$

Para el caso de la función de producción Cobb-Douglas:

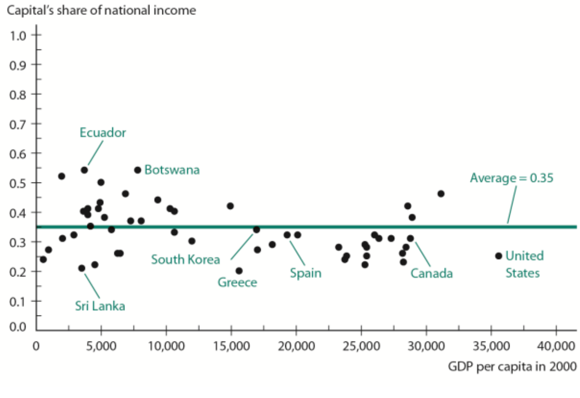
Capital: $\frac{PMg_K xK}{Y} = \frac{\alpha A K^{\alpha-1} L^{1-\alpha} .K}{A K^{\alpha} L^{1-\alpha}} = \alpha$

Trabajo: $\frac{PMg_L xL}{Y} = \frac{(1-\alpha) A K^{\alpha} L^{-\alpha} .L}{A K^{\alpha} L^{1-\alpha}} = (1-\alpha)$

Este resultado nos dice que, aunque las cantidades de capital y trabajo que hay en la economía varíen, las variaciones de la tasa de alquiler del capital y del salario serán tales que las participaciones de cada factor de producción en la renta nacional no variarán.

Este resultado es muy importante, ya que nos dice que podemos estimar el valor de α observando simplemente la participación del capital en la renta nacional. Generalmente, se estima que esta cifra es cercana a 1/3 y éste es el valor que utilizaremos (tal y como pone de manifiesto el siguiente gráfico).

Participación del capital en la renta en una muestra transversal



Fuente: Bernanke y Gurkaynak (2002)

El modelo de Solow

Con una función de producción que nos dice como se transforman el trabajo y el capital en producción, podemos analizar un sencillo modelo de crecimiento económico que mostrará la importancia del capital físico en la explicación de las diferencias entre los niveles de renta per cápita de los países. El modelo que examinaremos se denomina "modelo de Solow", en honor al economista y premio nobel Robert Solow, que lo creó en 1956. El modelo de Solow se centra en la cantidad de capital físico que tiene cada trabajador para trabajar.

En esta versión del modelo de Solow, suponemos que la cantidad de trabajo, L, se mantiene constante a lo largo del tiempo. También suponemos que la función de producción no varía con el tiempo, por lo que la productividad no mejora. En el caso de la función de producción Cobb-Douglas, eso equivale a suponer que el parámetro A de la función de producción es constante. Por lo tanto, en el modelo de Solow todo el efecto procede de la acumulación de capital, que depende de dos fuerzas: inversión y depreciación. Así pues, la variación del stock de capital es la diferencia entre la cantidad de inversión (I) y la cantidad de depreciación (D):

$$\dot{K}_t = I_t - D_t$$

En términos por trabajador: $\dot{k}_t = i_t - d_t$. A su vez, suponemos que se invierte una parte constante de la producción: $i_t = \gamma y_t$. Suponemos que en cada periodo se deprecia una porción constante del stock de capital $d_t = \delta k_t$.

Combinando las tres ecuaciones anteriores, podemos formular una ecuación que represente la evolución del capital por trabajador:

$$\dot{k}_t = \gamma y_t - \delta k_t$$

Puesto que $y_t = f(k_t)$, entonces:

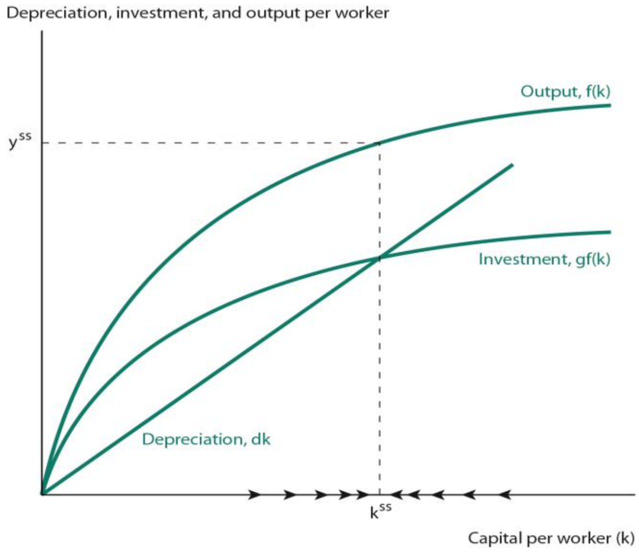
$$\dot{k}_t = \gamma f(k_t) - \delta k_t$$

Dicha ecuación describe la evolución del stock de capital por trabajador y nos indica, pues, que en una economía cerrada la inversión bruta debe igualarse al ahorro bruto.

2.2 El estado estacionario: el modelo de Solow como teoría de las diferencias de renta.

En el *estado estacionario* obtenemos el nivel de capital para el cual no hay variación con el paso del tiempo; de ahí el nombre de "estado estacionario". Es decir, es el punto en el que $\gamma f(k_t)$ y δk_t se cruzan en la siguiente figura:

El estado estacionario en el modelo de Solow



Fuente: Weil

¿Existe estado estacionario? En nuestro caso sí, gracias a las condiciones de INADA, ya que $\lim_{K \to 0} F'_K(K,L) = +\infty$ y $\lim_{K \to +\infty} F'_K(K,L) = 0$.

¿El estado estacionario es único? Sí, debido a la concavidad en la función de producción. Además, el estado estacionario es estable, ya que, si la economía comienza teniendo cualquier nivel de stock de capital distinto de k^{ss}, el stock de capital tenderá con el tiempo a K^{ss}.

- $\gamma f(k_t) > \delta k_t$, el stock de capital crece.
- $\gamma f(k_t) < \delta k_t$, el stock de capital disminuye.
- $\gamma f(k_t) = \delta k_t$, el stock de capital permanece constante.

Vamos a suponer una función de producción de tipo Cobb-Douglas y neoclásica:

$$Y_t = A(K_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha})$$

El aumento del capital se puede escribir como:

$$\dot{K}_t = \gamma A(K_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha}) - \delta K_t$$

En términos por trabajador:

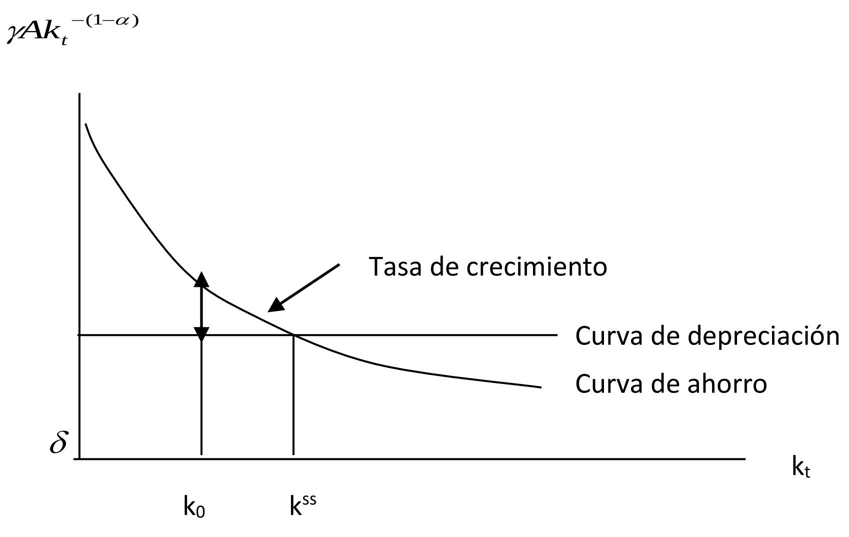
$$\dot{k}_t = \gamma A k_t^{\alpha} - \delta k_t$$

Si dividimos los dos términos por k_t obtenemos la tasa de crecimiento:

$$\frac{\dot{k}_t}{k_t} = \gamma A k_t^{-(1-\alpha)} - \delta$$

En el miembro de la izquierda de esta ecuación se recoge la tasa instantánea de crecimiento del capital. En el miembro de la derecha se nos indica que esta tasa de crecimiento viene dada por la diferencia entre dos funciones: $\gamma A k_t^{-(1-\alpha)}$ y δ . Estas dos funciones se han representado en el siguiente gráfico:

El Modelo Neoclásico (α< 1)



El valor de k_t para el cual ambas curvas se cruzan, k^{ss}, es el capital que existe en el estado estacionario:

$$\gamma A k_t^{-(1-\alpha)} = \delta$$

Es decir, el porcentaje de renta que los agentes deciden ahorrar tiene que cubrir la tasa de depreciación del capital. De esta forma, se dota a los agentes del siguiente período con el mismo capital inicial con que contaban los agentes del período anterior.

El capital por trabajador correspondiente al estado estacionario viene dado por la siguiente expresión:

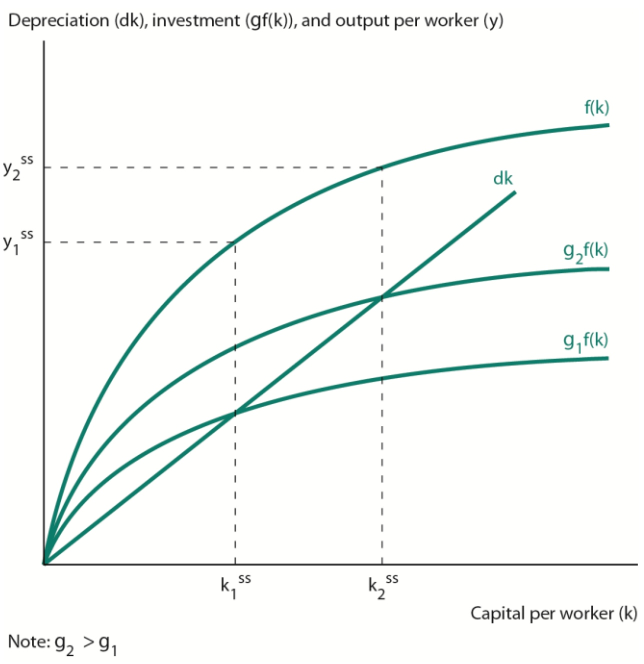
$$k^{ss} = \left(\frac{\gamma A}{\delta}\right)^{1/(1-\alpha)}$$

, que depende positivamente de la tasa de ahorro y negativamente de la tasa de depreciación del stock de capital. Sustituyendo en la función de producción obtenemos el nivel de producción de estado estacionario:

$$y^{ss} = A(k^{ss})^{\alpha} = A^{1/(1-\alpha)}\left(\frac{\gamma}{\delta}\right)^{\alpha/(1-\alpha)}$$

Esta ecuación confirma que un aumento en la tasa de inversión eleva el nivel de producción del estado estacionario, tal y como se demuestra en la siguiente figura:

Efecto de un aumento de la tasa de inversión en el estado estacionario



Fuente: Weil

Por otra parte, si aumenta la tasa de depreciación se reduce la renta de estado estacionario.

El modelo de Solow como teoría de las diferencias en renta

Este resultado muestra que el nivel de producción por trabajador del estado estacionario depende de su tasa de inversión. Por lo tanto, podemos concebir el modelo de Solow como una teoría de las diferencias en renta.

Para simplificar el análisis, consideremos el caso en el que las únicas diferencias que hay entre los países son las diferencias entre sus tasas de inversión, γ. Sea γ_i la tasa de inversión en el país i y γ_j la tasa de inversión en el país j. Sus niveles de producción por trabajador de estado estacionario vienen dados por las ecuaciones:

$$y_i^{ss} = A^{1/(1-\alpha)} \left(\frac{\gamma_i}{\delta} \right)^{\alpha/(1-\alpha)}$$

$$y_j^{ss} = A^{1/(1-\alpha)} \left(\frac{\gamma_j}{\delta} \right)^{\alpha/(1-\alpha)}$$

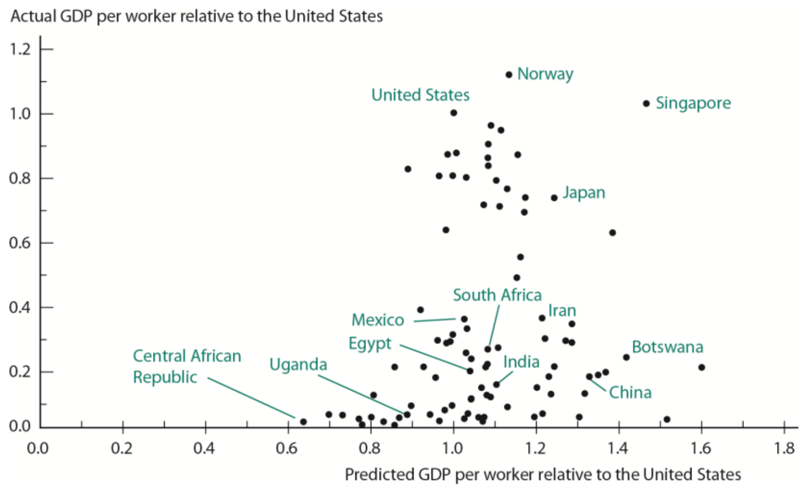
Dividiendo la primera de estas ecuaciones por la segunda obtenemos el cociente entre la renta por trabajador del país i y la renta por trabajador del país j:

$$\frac{y_i^{ss}}{y_j^{ss}} = \left(\frac{\gamma_i}{\gamma_j} \right)^{\alpha/(1-\alpha)}$$

En la siguiente figura se muestran los resultados de la aplicación de esta técnica a los datos de una amplia muestra de países.

En conjunto, la figura muestra una significativa relación entre la renta que predice el modelo y la renta observada. Todos los modelos que el modelo predice que serán pobres lo son y la mayoría de los países que el modelo predice que serán ricos lo son. Sin embargo, el modelo dista de ser perfecto: algunos países que predice que serán ricos son en realidad pobres. Por ejemplo, predice que Tanzania es uno de los países más ricos del mundo, pero en realidad es uno de los más pobres.

PIB por trabajador que predice el modelo y el observado



Fuente: Weil

¿Qué hacemos con el ajuste imperfecto entre las predicciones del Modelo de Solow y los datos observados sobre la renta por trabajador? En primer lugar, hay otros elementos que influyen en la renta de los países y que hemos dejado fuera del análisis (crecimiento de la población, otros factores productivos adicionales, diferencias de productividad entre los países, etc…). Además de estas causas del ajuste imperfecto que se observa en la figura, otra razón es que los países pueden no estar en su estado estacionario.

Además de explicar por qué el modelo de Solow podría no ajustarse a los datos perfectamente, la diferencia entre los niveles observados de renta de los países y sus estados estacionarios puede ayudarnos a utilizar el modelo para analizar las diferencias entre las tasas de crecimiento de la renta de los países.

2.3 La convergencia entre economías: el modelo de Solow como teoría de las tasas relativas de crecimiento.

El modelo de Solow, en la forma en que lo presentamos, no da una explicación completa a las tasas de crecimiento. La razón se halla en que, una vez que un país alcanza su estado estacionario, ya no crece más. A pesar de este fallo del modelo de Solow, podemos preguntarnos si tiene algo que decir sobre las tasas relativas de crecimiento, es decir, porque unos países crecen más deprisa que otros. En este caso, el modelo puede hacer predicciones muy útiles.

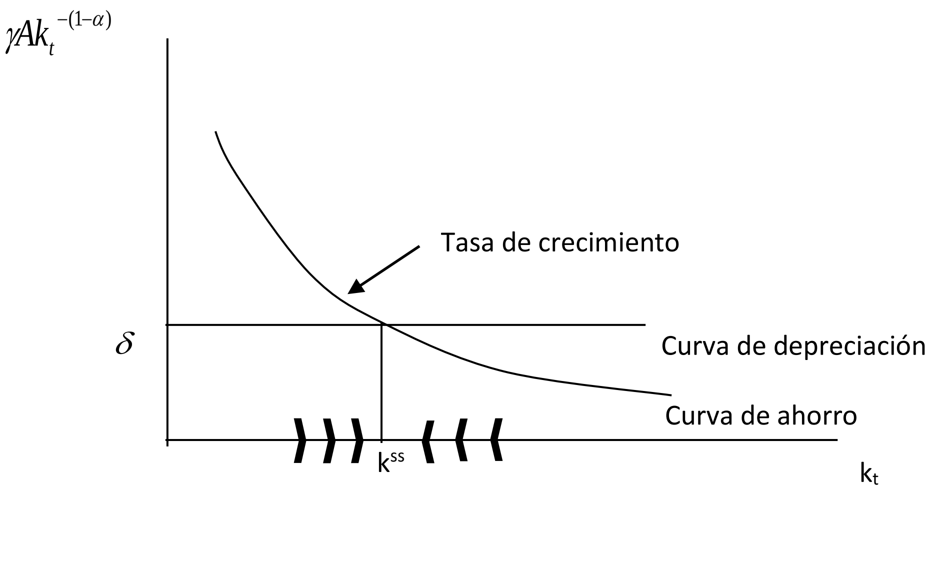
La clave para utilizar el modelo de Solow para examinar las tasas relativas de crecimiento es analizar países que no están en el estado estacionario. Como cualquier país que tiene una tasa de inversión constante acabará alcanzando un estado estacionario en el que la tasa de crecimiento de la producción por trabajador es cero, todo el crecimiento que observamos en este modelo será transitorio, es decir, ocurrirá durante la transición hacia el estado estacionario.

<u>Dinámica de transición</u>

Vamos a analizar que sucede alrededor del estado estacionario. Suponiendo una función de producción de tipo Cobb-Douglas, sabemos que el crecimiento del stock de capital por trabajador se representa mediante la ecuación:

$$\frac{\dot{k}_t}{k_t} = \gamma A k_t^{-(1-\alpha)} - \delta$$

El Modelo Neoclásico (α< 1)



- Si $k < k^{ss}$, $\gamma A k_t^{-(1-\alpha)} > \delta$, entonces $\frac{\dot{k}_t}{k_t} > 0$

- Si $k > k^{ss}$, $\gamma A k_t^{-(1-\alpha)} < \delta$, entonces $\frac{\dot{k}_t}{k_t} < 0$

Tomando logaritmos sobre la renta de estado estacionario, obtenemos:

$$\ln y^{ss} = \frac{\alpha}{1-\alpha}\ln A + \frac{\alpha}{1-\alpha}\ln\gamma - \frac{\alpha}{1-\alpha}\ln\delta$$

Observamos que el valor de la renta por trabajador en estado estacionario depende positivamente de la tasa de inversión y negativamente de la tasa de depreciación. A su vez, ambos coeficientes son iguales, pero de signo contrario. Tomando diferencias en la ecuación en logaritmos de la función de producción por trabajador:

$$\frac{d\ln y_t}{dt} = \alpha\frac{d\ln k_t}{dt}$$

Así pues, el comportamiento del crecimiento de la renta es similar al del capital. Por tanto, dos economías con el mismo estado estacionario, convergen hacia el nivel de capital del mismo.

<u>Análisis de convergencia</u>

Vamos a analizar cómo se estudia la convergencia entre países cuando el estado estacionario no es el mismo. Sustituyendo en la expresión anterior, se obtiene:

$$\frac{d\ln y_t}{dt} = \alpha A\left[\gamma e^{-(1-\alpha)\ln k_t} - \delta\right]$$

Log-linealizando alrededor del estado estacionario[1]:

---

[1] La aproximación de Taylor de primer orden alrededor del estado estacionario $(\ln k^{ss})$ correspondiente al término $\left[\gamma e^{-(1-\alpha)\ln k_t} - \delta\right]$ se lleva a cabo de la siguiente manera:
Partimos de la función:

$$\frac{d\ln y_t}{dt} = -\alpha A\left[(1-\alpha)\delta\left[\ln k_t - \ln k^{ss}\right]\right]$$

Si denominamos $\lambda = (1-\alpha)\delta$ a la velocidad de convergencia hacia el estado estacionario podemos formular la ecuación anterior en términos más simples:

$$\frac{d\ln y_t}{dt} = -\alpha A\lambda_t\left[\ln k_t - \ln k^{ss}\right] = -\lambda\left[\ln y_t - \ln y^{ss}\right]$$

De esta ecuación diferencial se desprende que:[2]

$$\ln y_t = e^{-\lambda_t}\ln y_{t-T} + (1-e^{-\lambda_t})\ln y^{ss}$$

Restando $\ln y_{t-T}$ a ambos lados de la igualdad obtenemos la tasa de crecimiento de la renta:
$$\frac{\ln y_t - \ln y_{t-T}}{T} = -\frac{(1-e^{-\lambda t})}{T}\ln y_{t-T} + \frac{(1-e^{-\lambda t})}{T}\ln y^{ss}$$

Por último, sustituyendo en el logaritmo de la renta por trabajador en estado estacionario llegamos a la ecuación de convergencia:

$$\frac{\ln y_t - \ln y_{t-T}}{T} = -\frac{(1-e^{-\lambda t})}{T}\ln y_{t-T} + \frac{(1-e^{-\lambda t})}{T}\frac{\alpha}{1-\alpha}\ln A + \frac{(1-e^{-\lambda t})}{T}\frac{\alpha}{1-\alpha}\ln\gamma - \frac{(1-e^{-\lambda t})}{T}\frac{\alpha}{1-\alpha}\ln\delta$$

La estimación de la ecuación de convergencia anterior nos va a permitir estimar el grado de convergencia en renta per cápita existente entre diferentes economías. Así pues, el

---

$$f(\ln k_t) = \left[\gamma e^{-(1-\alpha)\ln k_t} - \delta\right]$$

Así pues, la expansión de Taylor alrededor de $(\ln k^{ss})$ adopta la expresión:

$$f(\ln k_t) = f(\ln k^{ss}) + f'(\ln k^{ss})\left[\ln k_t - \ln k^{ss}\right]$$

donde:

$$f(\ln k^{ss}) = \gamma e^{-(1-\alpha)\ln k^{ss}} - \delta = 0$$

$$f'(\ln k^{ss}) = (1-\alpha)\delta$$

Por tanto:

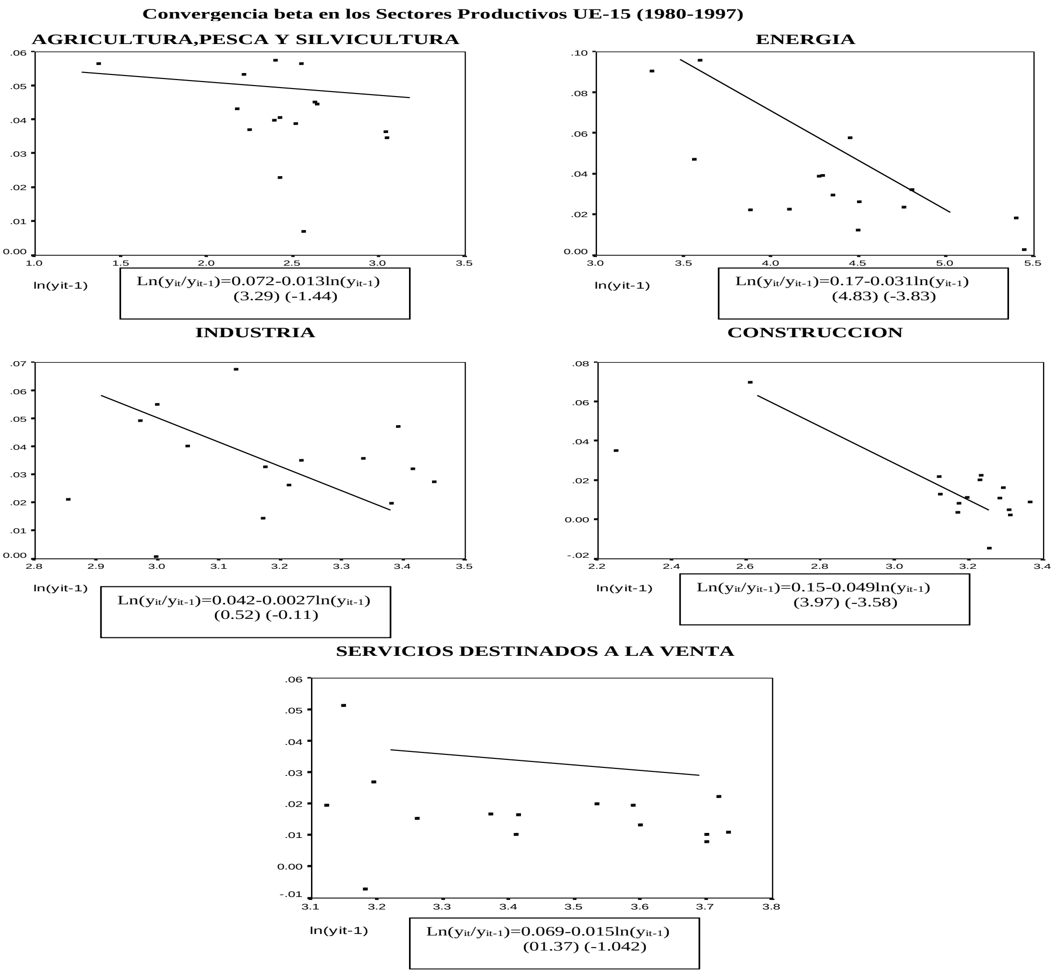
$$f(\ln k_t) \cong -(1-\alpha)\delta\left[\ln k_t - \ln k^{ss}\right]$$

[2] En términos generales, $\dot{x}(t) = ax(t)$ se resuelve como $x(t) = c\exp(at)$ o, si comparamos con un periodo inicial 0, como $x(t) = x_0\exp(at)$. Por tanto, en nuestro caso:

$\ln\dot{y}(t) = -\lambda\left[\ln y((t) - \ln y^{ss}\right]$ con respecto a y(t-T) se resuele como

$\ln y(t) = \left[\ln y(t-T)e^{-\lambda t} - \ln y^{ss}e^{-\lambda t}\right] + \ln y^{ss} = e^{-\lambda t}ny(t-T) + (1-e^{-\lambda t})\ln y^{ss}$

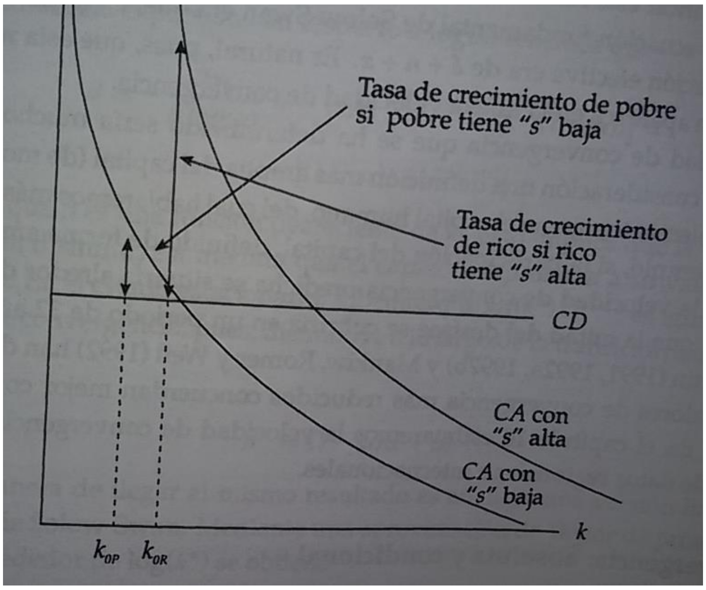
coeficiente que acompaña al nivel de renta en el periodo inicial, $\ln y_{t-T}$, nos indica en qué medida las economías que son pobres en el momento de partida se acercan a la situación de las más ricas a lo largo del tiempo y a qué velocidad se produce dicho acercamiento, λ. Por su parte, las restantes variables que constituyen la ecuación hacen referencia a los determinantes del estado estacionario. Por tanto, dicha ecuación nos permite analizar la existencia de "convergencia condicionada", es decir, el grado de convergencia de cada economía a su propio estado estacionario. Si analizásemos el grado de acercamiento hacia el mismo estado estacionario (es decir, sin variables de estado estacionario), estaríamos analizando el grado de "convergencia absoluta". La "convergencia absoluta" o hipótesis de convergencia se contrasta empíricamente analizando la relación inversa entre la renta inicial y su tasa de crecimiento.



Fuente: elaboración propia

Por su parte, la "convergencia condicionada" introduce como determinantes las variables del estado estacionario, es decir, productividad (A), tasa de inversión, γ, y depreciación del capital, δ. En ese caso, el modelo no predice un mayor crecimiento en los países pobres.

Convergencia condicionada



Fuente: Sala-i-Martin

En el ejemplo de la figura, suponemos que la tasa de ahorro en el país pobre es diferente a la del país rico, por lo que los dos países convergen a un estado estacionario distinto. Nótese que, si no sabemos qué tasa de ahorro tiene cada país, no sabemos cuál es su tasa de crecimiento. Sin embargo, si el país pobre es el que tiene una tasa de ahorro inferior, entonces su tasa de crecimiento es menor y, en este caso, habría divergencia y no convergencia. Por tanto, si un país es pobre en la actualidad, pero se espera que siga siéndolo en el largo plazo, entonces su tasa de crecimiento no será muy elevada. Por el contrario, si se espera que dicho país acabe siendo muy rico, entonces su tasa de crecimiento actual será alta. El modelo neoclásico, pues, predice la convergencia únicamente después de tener en cuenta los elementos determinantes del estado estacionario.

Regresión de convergencia. Variable dependiente: $\ln(y_{it} / y_{i,t-1})$ **.UE-15 (1980-1997)**

MODELO DE DATOS DE PANEL CON EFECTOS FIJOS					
	I	**II**	**III**	**IV**	**V**
$\ln(y_{i,t-1})$	0.0055(4.56)**	0.00031(0.076)	-0.00024(-0.056)	-0.012(-1.54)*	-0.014(-1.94)**
$\ln(S_{kit})-\ln(n_{it}+g+\delta)$		0.0075(1.57)*	0.0077(1.61)*	-0.0097(-0.75)	-0.0048(-0.54)
$\ln(S_{git})-\ln(n_{it}+g+\delta)$				-0.0017(-0.35)	-0.0013(-0.28)
$\ln(S_{hit})-\ln(n_{it}+g+\delta)$			0.00065(0.35)		0.0047(1.76)**
$\ln(1-\tau_{it})$				0.022(1.69)**	0.018(2.15)**
Test F efectos ind.	F(14,239)=3.19	F(14,238)=5.37	F(14,237)=5.19	F(14,236)=5.24	F(14,235)=5.05
Test Hausman	$\chi^2(1)=1.36$	$\chi^2(2)=12.64$	$\chi^2(3)=13.29$	$\chi^2(4)=13.39$	$\chi^2(5)=14.14$
Test Wald Sig.	20.71 (G.L.=1)	268.64 (G.L.=2)	267.54 (G.L.=3)	275.16 (G.L.=4)	309.51 (G.L.=5)
Autocorr. 1er orden	-1.384	1.048	1.020	1.143	0.938
Autocorr. 2° orden	0.255	1.711	1.660	2.063	1.602

G.L. = grados de libertad. T-estadístico entre paréntesis.
* parámetro significativo al 90%.
** parámetro significativo al 95%.

2.4 El ahorro en el modelo de Solow: la regla de oro.

Hemos visto que para cada tasa de ahorro existe un stock de capital estacionario. Imaginemos que, a través de políticas de incentivos fiscales, un país puede cambiar su tasa de ahorro al nivel que más desee. Una pregunta importante es ¿qué nivel escogerá? La sociedad escogerá una tasa de ahorro que comporte un mayor nivel de consumo per cápita. El estado estacionario que conlleva el mayor nivel de consumo per cápita se llama *la regla de oro de la acumulación de capital* y lo denotaremos con k_{oro}.

Si tenemos en cuenta que el ahorro es igual a la producción menos el consumo, podemos expresar el consumo de estado estacionario, c^{ss}, como función del capital de estado estacionario, k^{ss}:

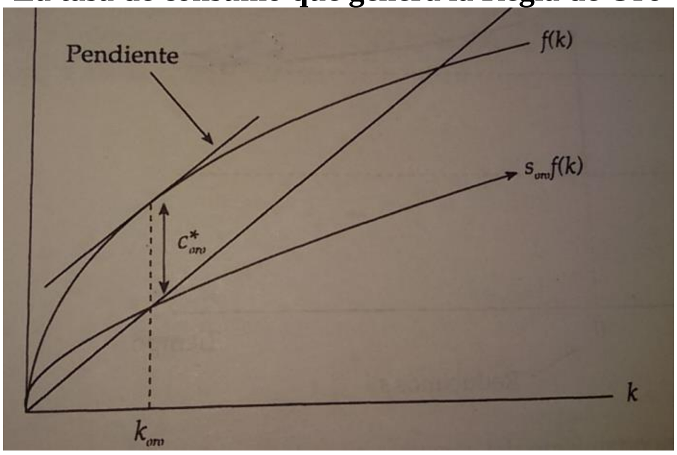
$$c^{ss} = f(k^{ss}) - \delta k^{ss}$$

Para encontrar el capital de la regla de oro, basta con maximizar el consumo de estado estacionario con respecto a k^{ss}.

$$f'(k_{oro}) = \delta$$

En la siguiente figura la distancia entre la función de producción y la recta de depreciación es el consumo de estado estacionario:

La tasa de consumo que genera la Regla de Oro

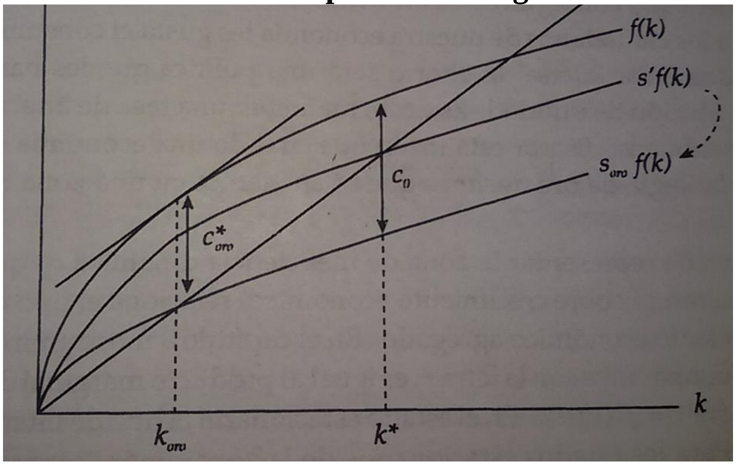


Fuente: Sala-i-Martin

Recuérdese que no hay nada en este modelo que nos diga que la economía tenderá a ir hacia la Regla de Oro. Para alcanzar este punto, habrá que escoger la tasa de ahorro que haga que el estado estacionario sea k_{oro}.

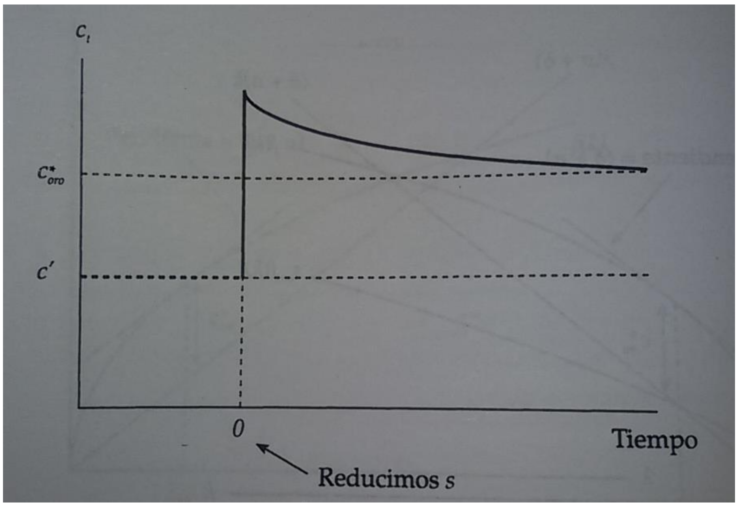
Si la tasa de ahorro es superior, entonces el stock de capital será superior y la economía es ineficiente. Esta economía podría incrementar claramente el consumo de estado estacionario si redujera la tasa de ahorro al nivel de la regla de oro, ya que por definición el consumo asociado con esta tasa de ahorro es el máximo.

Tasa de ahorro superior a la Regla de Oro



Fuente: Sala-i-Martin

La siguiente figura describe la trayectoria del consumo:



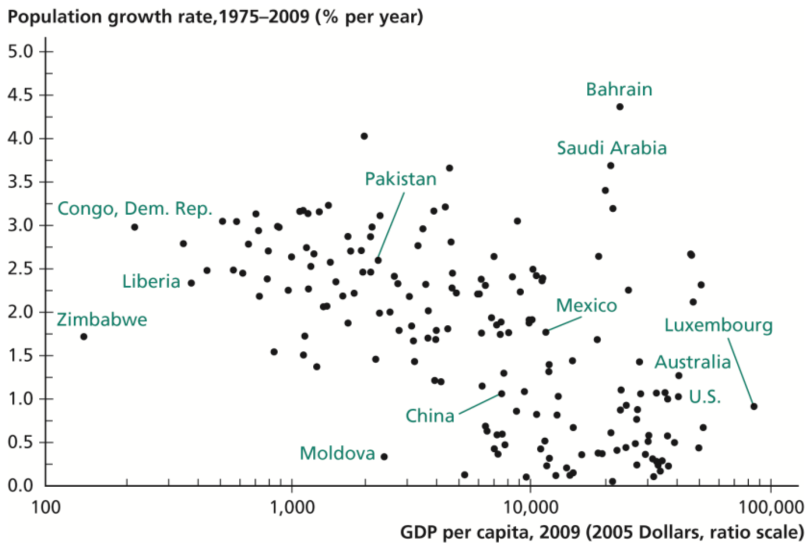
Fuente: Sala-i-Martin

A largo plazo, la economía converge hacia k_{oro}. Es por esta razón que cuando una economía se encuentra a la derecha de la Regla de Oro decimos que se encuentra en una zona de *ineficiencia dinámica*.

2.5 La población en el modelo de Solow: consecuencias económicas del cambio demográfico

Como nos muestra la siguiente figura, existe una estrecha correlación negativa entre la renta per cápita y la tasa de crecimiento de la población.

Relación entre la renta per cápita y el crecimiento de la población



Fuente: Heston et al. (2002)

Veamos cómo puede incorporarse el crecimiento de la población al modelo de Solow analizado, al objeto de comprobar en qué medida el crecimiento de la población es un factor explicativo de las diferencias en renta.

En el modelo malthusiano, el volumen de población afecta a su vez al nivel de renta per cápita. Sin embargo, en los últimos doscientos años el mecanismo malthusiano ha dejado de funcionar, ya que el crecimiento de la población y la renta per cápita han aumentado hasta niveles nunca vistos antes en la historia.

¿Significa el hecho de que el modelo malthusiano ya no funcione que la población no afecta a la renta per cápita? La respuesta a esta pregunta es negativa por dos razones. En primer lugar, el mecanismo malthusiano por el que un aumento de la población significa escasez de recursos como la tierra sigue siendo un importante factor determinante de la renta de los países, aunque no desempeñe el papel dominante que ha desempeñado históricamente. En segundo lugar, existe una vía totalmente diferente, aparte de la que examinó Malthus, a través de la cual la población afecta a la renta per cápita. Esta segunda vía es el efecto que produce la población en el capital. Como mejor se comprende esta segunda vía a través de la cual el crecimiento de la población afecta a la renta es ampliando el modelo de Solow.

Retomando la expresión que representa la evolución del capital:

$$\dot{K}_t = \gamma F(K_t, L_t) - \delta K_t$$

En términos por empleado:

$$\dot{k}_t = \gamma f(k_t) - \delta k_t$$

Incorporando el crecimiento de la población trabajadora por medio de n, obtenemos:[3]

$$\dot{k}_t = \gamma f(k_t) - (n+\delta)k_t$$

La condición de estado estacionario implica:

$$\gamma f(k_t) = (n+\delta)k_t$$

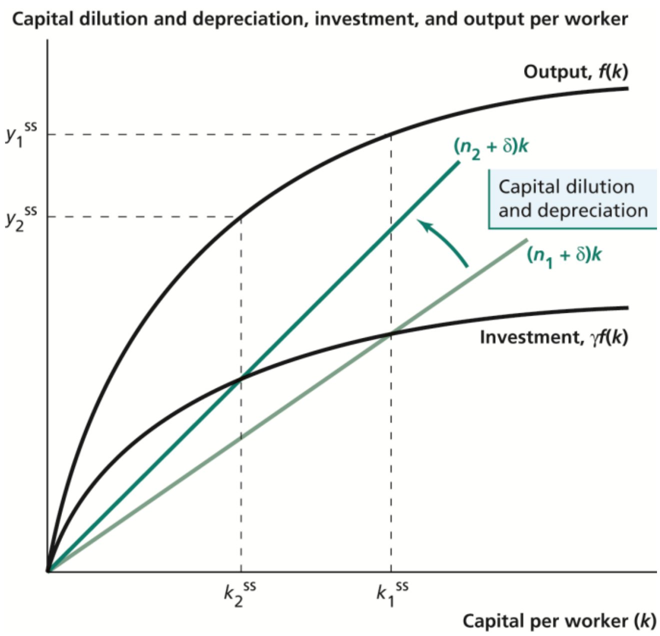
Gráficamente, el aumento de la tasa de crecimiento de la población gira la curva que representa $(n+\delta)k$ en sentido contrario a las agujas del reloj y lleva a un nivel de producción del estado estacionario más bajo. Por lo tanto, el modelo de Solow, modificado para incluir el crecimiento de la población, ofrece una posible explicación de porqué los países que tienen una elevada tasa de crecimiento de la población son más pobres que los países que tienen una baja tasa de crecimiento de la población. Concretamente, un aumento del crecimiento de la población diluye más deprisa el stock de capital por trabajador y, por lo tanto, reduce el nivel de producción por trabajador del estado estacionario.

---

[3] Podemos hallar el equivalente de esta ecuación en tiempo continúo utilizando el cálculo:

$$\dot{k}_t = \frac{dk_t}{dt} = \frac{d\left(\frac{K}{L}\right)}{dt} = \frac{L\frac{dK}{dt} - K\frac{dL}{dt}}{L^2} = \frac{\dot{K}}{L} - k\frac{\dot{L}}{L} = \frac{\gamma Y - \delta K}{L} - k\frac{\dot{L}}{L} = \gamma y - \delta k - nk$$

Obsérvese que la definición de la tasa de crecimiento de la población trabajadora, n, es $n = \frac{\dot{L}}{L}$.



Continuando con la función de producción de tipo Cobb-Douglas, tenemos que:

$$f(k_t) = Ak_t^{\alpha}$$

La condición de estado estacionario:

$$\gamma A k^{-(1-\alpha)} = (n+\delta)$$

Implica que:

$$k^{ss} = \left(\frac{\gamma A}{n+\delta}\right)^{1/(1-\alpha)}$$

Por último, introduciendo k^{ss} en la función de producción hallamos el nivel de producción por trabajador del estado estacionario:

$$y^{ss} = A^{1/(1-\alpha)}\left(\frac{\gamma}{n+\delta}\right)^{\alpha/(1-\alpha)}$$

Para calcular el efecto que produce el crecimiento de la población en el nivel de producción por trabajador del estado estacionario, supongamos que estamos comparando dos países que son iguales en todos los aspectos, salvo en su tasa de crecimiento de la población. Llamamos a los países i y j y representamos las tasas de crecimiento de su población por medio de n_i y n_j. Las ecuaciones de los niveles de producción por trabajador del estado estacionario de los dos países son:

$$y_i^{ss} = A^{1/(1-\alpha)}\left(\frac{\gamma}{n_i+\delta}\right)^{\alpha/(1-\alpha)}$$

$$y_j^{ss} = A^{1/(1-\alpha)}\left(\frac{\gamma}{n_j+\delta}\right)^{\alpha/(1-\alpha)}$$

Dividiendo ambas expresiones:

$$\frac{y_i^{ss}}{y_j^{ss}} = \left(\frac{n_j+\delta}{n_i+\delta}\right)^{\alpha/(1-\alpha)}$$

Ejemplo: para $\delta = 5\%; n_i = 0\%; n_j = 4\%; \alpha = 1/3$, tenemos que:

$$\frac{y_i^{ss}}{y_j^{ss}} = \left(\frac{0{,}04+0{,}05}{0{,}00+0{,}05}\right)^{1/2} \approx 1{,}34$$

Nuestro cálculo nos dice, pues, que en el país en el que el crecimiento de la población es nulo (país i) la renta por trabajador seria un 34% más alta que en el país en el que el crecimiento de la población es de un 4% (país j). Esta diferencia es muy pequeña en comparación con las grandes diferencias de renta per cápita asociadas a las diferencias de crecimiento de la población que se ven en la figura anterior.

Esto es debido a que el modelo de Solow, ampliado para incorporar el crecimiento de la población, muestra que un aumento del crecimiento de la población puede reducir la renta per cápita a través de la vía de la dilución de capital. Como tal, este modelo de Solow ampliado puede explicar en parte la correlación negativa entre la renta per cápita y el crecimiento de la población. Sin embargo, este modelo ampliado de Solow no explica porque las tasas de crecimiento de la población varían de unos países a otros.

2.6 El modelo de Solow con progreso tecnológico exógeno

Hasta el momento, hemos observado que el modelo de Solow no explica del todo las diferencias en renta. Por ese motivo, vamos a incorporar cambios en el progreso tecnológico (A).

Suponemos que el crecimiento de A viene dado por la expresión: $A_t = A_0 e^{g_t}$. Por tanto, la función de producción Cobb-Douglas adopta la forma:

$$Y_t = K_t^{\alpha} \left(A_t L_t \right)^{1-\alpha},$$

siendo $L_t = L_o e^{nt}$. Puesto que suponemos que el progreso tecnológico incentiva el empleo, a partir de aquí vamos a fijarnos en unidades efectivas de empleo. Por tanto, capital y producción en unidades efectivas de empleo se obtienen dividiendo por $A_t L_t$. En ese caso, la ley de movimiento del capital en unidades efectivas de empleo adopta la forma:[4]

$$\dot{\hat{k}}_t = \gamma f(\hat{k}_t) - (n+g+\delta)\hat{k}_t = \gamma \hat{k}^{\alpha}{}_t - (n+g+\delta)\hat{k}_t$$

En estado estacionario:

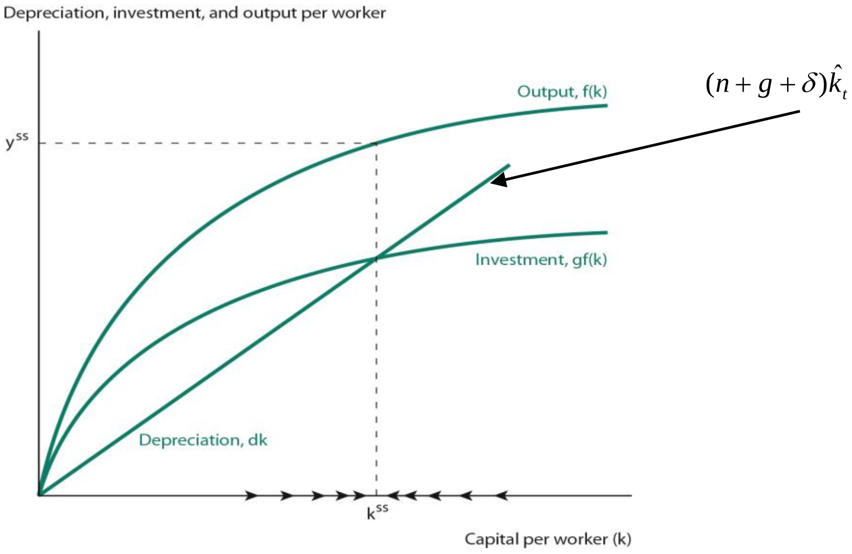
$$\frac{\dot{\hat{k}}_t}{\hat{k}_t} = \gamma \hat{k}_t^{-(1-\alpha)} - (n+g+\delta) = 0$$

De donde se derivan el capital y renta en estado estacionario:

$$\hat{k}^{ss} = \left(\frac{\gamma}{n+g+\delta} \right)^{1/(1-\alpha)} \qquad \hat{y}^{ss} = \left(\frac{\gamma}{n+g+\delta} \right)^{\alpha/(1-\alpha)}$$

[4]

$$\dot{\hat{k}} = \frac{d\hat{k}}{dt} = \frac{d\left(\dfrac{K}{AL}\right)}{dt} = \frac{AL\dfrac{dK}{dt} - K\left(\dfrac{dA}{dt}L + \dfrac{dL}{dt}A\right)}{(AL)^2} = \frac{\dot{K}}{AL} - \frac{K}{AL}\left[n+g\right] = \gamma\hat{y} - (n+g+\delta)\hat{k}$$



<u>Senda de crecimiento equilibrado</u>

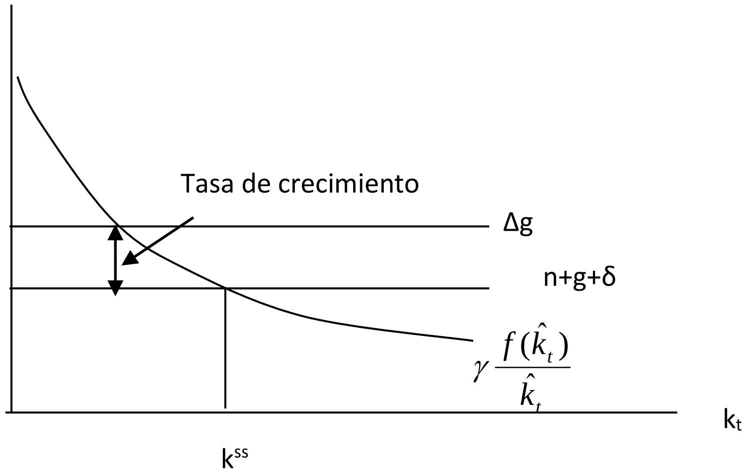
Es como se denomina al estado estacionario, ya que observamos:

- $\hat{k}, \hat{y}$ constantes
- k, y crecen a tasa g
- K, Y crecen a tasa n+g

Por tanto, este modelo ampliado con progreso tecnológico conlleva una tasa de crecimiento del PIBpc en estado estacionario igual a la del progreso tecnológico, g. Sin embargo, el progreso tecnológico es exógeno. Por tanto, el modelo no explica de donde proceden las diferencias en progreso tecnológico.

<u>Dinámica de transición</u>

$$\frac{\dot{\hat{k}}_t}{\hat{k}_t} = \gamma \frac{f(\hat{k}_t)}{\hat{k}_t} - (n+g+\delta)$$



Analicemos cual es el efecto de los distintos parámetros:

- g: Inicial, $\frac{\dot{\hat{k}}_t}{\hat{k}_t} = -\Delta g, \frac{\dot{\hat{y}}_t}{\hat{y}_t} = -\alpha \Delta g$; Largo plazo, $\frac{\dot{\hat{k}}_t}{\hat{k}_t} = \frac{\dot{\hat{y}}_t}{\hat{y}_t} = 0$
- El resto de parámetros solo generan efectos transitorios. Por tanto, solo tienen efectos permanentes sobre k y K, que continúan creciendo a tasas g y n+g, respectivamente.

2.7 El capital humano

Hasta ahora, hemos considerado que el trabajo, que es el factor de producción humano, era idéntico en todos los países y en todos los periodos. Pero en realidad, la calidad del trabajo que ofrece una persona puede variar enormemente. Diariamente observamos que las personas que tienen mejor trabajo para ofrecer (por salud, educación, etc…) pueden ganar más.

Por estos motivos, en este apartado analizamos la idea de que las diferencias de calidad entre los trabajadores son una de las explicaciones de las diferencias de renta entre los países. Las cualidades del trabajo en las que centramos nuestra atención se conocen con el nombre colectivo de **capital humano**.

2.7.1 La educación como base del capital humano.

La inversión que mejora el intelecto de una persona, en otras palabras, la educación, se ha convertido en el tipo más importante de inversión en capital humano. El capital humano en forma de educación guarda una gran similitud con el capital físico: ambos requieren una inversión para crearlos y, una vez creados, ambos tienen un valor económico.

El rendimiento de la educación es el aumento de los salarios que percibiría una persona si tuviera un año más de estudios.

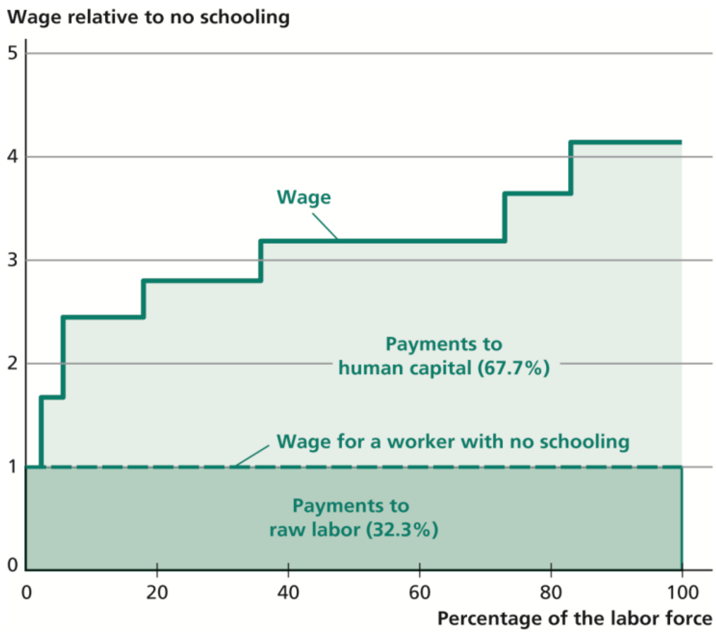
Una vez introducida la idea del capital humano, podemos ver que parte del pago al trabajo representa un pago al capital humano que poseen los trabajadores y que parte representa un pago por el “trabajo bruto”, es decir, lo que ganarían los trabajadores si no poseyeran ningún capital humano. Nuestro análisis de la relación entre la educación y los salarios nos proporciona los instrumentos necesarios para realizar esta tarea.

La siguiente tabla muestra los datos necesarios para realizar esos cálculos en dos grupos de países, en vías de desarrollo y avanzados.

			Percentage of the Population	
Highest Level of Education	Years of schooling	Wage Relative to No Schooling	Developing Countries	Advanced Countries
No Schooling	0	1.00	20.8	2.5
Incomplete Primary	4	1.65	10.4	3.4
Complete Primary	8	2.43	18.0	12.3
Incomplete Secondary	10	2.77	19.3	17.8
Complete Secondary	12	3.16	23.2	37.4
Incomplete Higher	14	3.61	2.9	9.9
Complete Higher	16	4.11	5.3	16.6

Source: Barro and Lee (2010).

Las siguientes figuras, que corresponden a los países en vías de desarrollo y a los países avanzados, respectivamente, muestran gráficamente como se combinan las cifras de la tabla para estimar la proporción de los salarios que representa el rendimiento del capital humano.

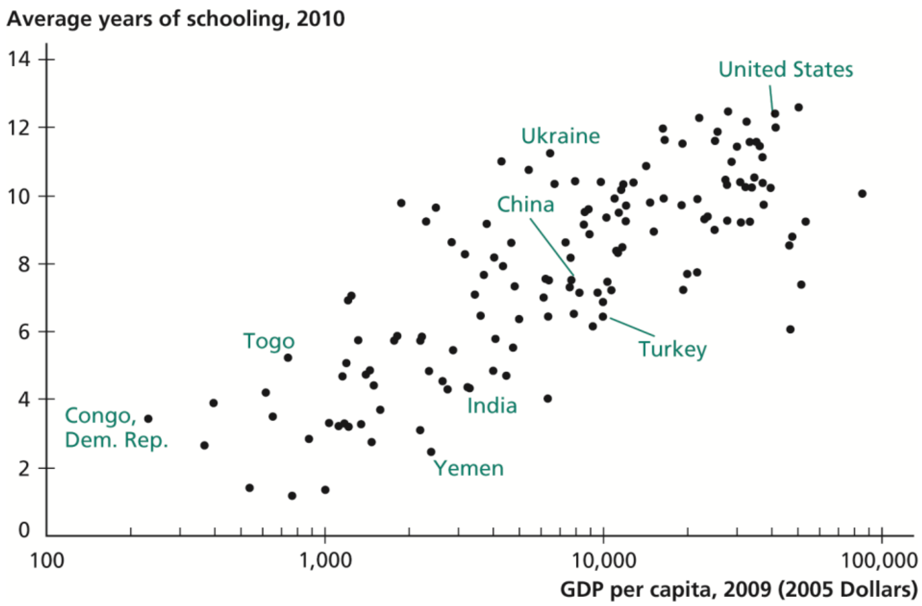


Dividiendo la parte de los salarios que se debe al capital humano por la cantidad total de salarios pagados, se obtiene la proporción de los salarios que se paga al capital humano. En los países en vías de desarrollo, esta proporción es del 60% y en los países avanzados es del 68%. Una vez que sabemos cuál es la proporción de los salarios correspondiente al capital humano, es sencillo calcular la participación del capital humano en la renta nacional. Concretamente, como los salarios representan 2/3 (1-α) de la renta nacional, multiplicamos la proporción de los salarios correspondiente al capital humano por 2/3. En el caso de los países en vías de desarrollo, este cálculo indica que la participación de la renta nacional correspondiente al capital humano es del 39% y en el de los países avanzados es del 45%.

Ahora podemos explicar porque es correcto utilizar un valor de α mayor que la participación del capital físico en la renta nacional. La idea clave es que debemos interpretar el significado del capital en un sentido más amplio. Si incluimos tanto el capital humano como el capital físico en nuestra definición, la participación del capital en la renta nacional es de 2/3 en los países en vías de desarrollo y mayor aun en los países avanzados.

2.7.2 Un modelo de crecimiento con capital humano.

Como muestra la siguiente figura, la relación entre el número medio de años de estudio de un país y el nivel de renta per cápita es muy estrecha. Pero esta observación no nos dice por si sola en qué medida se deben las diferencias de renta a las diferencias de educación.



Para tener una medida cuantitativa de la influencia de las diferencias de educación en las diferencias en renta, ampliamos el modelo de Solow. Comenzamos con la misma función de producción Cobb-Douglas, pero suponiendo que la cantidad de trabajo que ofrece cada trabajador varía de unos países a otros. Utilizamos el símbolo h para representar la cantidad de trabajo por trabajador y mostramos como está relacionada h con el nivel de educación. Incorporando esta idea, la función de producción se convierte en:

$$Y_t = AK_t^{\alpha}\left(hL_t\right)^{1-\alpha}$$

Obsérvese que en esta función de producción el término A se ha sustituido por $h^{1-\alpha}A$. Por tanto, si tenemos en cuenta que la cantidad de trabajo por trabajador varía de unos países a otros, el nivel de producción por trabajador de estado estacionario es:

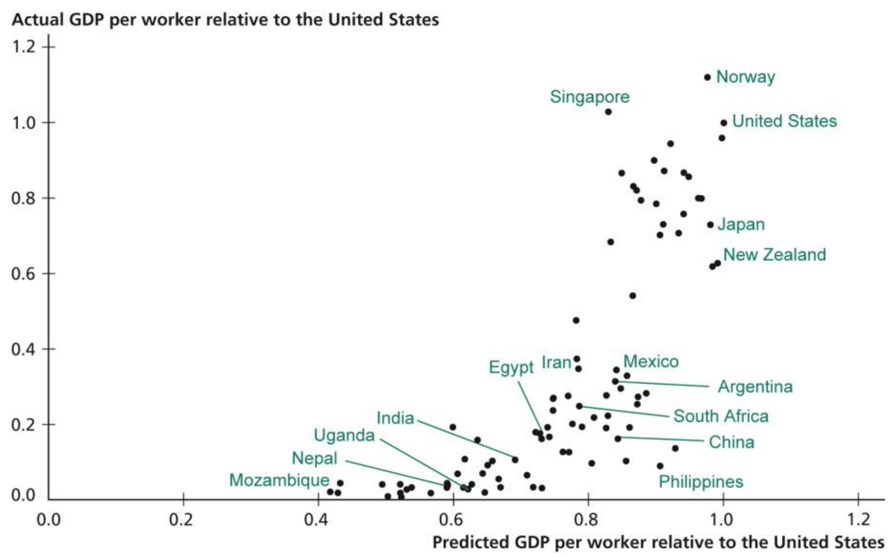
$$y^{ss} = \left(h^{1-\alpha} A\right)^{1/(1-\alpha)} \left(\frac{\gamma}{n+\delta}\right)^{\alpha/(1-\alpha)} = h\left[A^{1/1-\alpha}\left(\frac{\gamma}{n+\delta}\right)^{\alpha/(1-\alpha)}\right]$$

Esta ecuación muestra claramente que el nivel de producción del estado estacionario es directamente proporcional a h, que es la medida de la cantidad de trabajo por trabajador.

Para averiguar hasta qué punto las diferencias internacionales entre las cantidades de trabajo por trabajador pueden provocar una diferencia de producción, consideremos el caso de dos países con diferencias únicamente en h. Representando los países por medio de los símbolos i y j, podemos expresar el cociente entre sus niveles de producción del estado estacionario de la siguiente forma:

$$\frac{y_i^{ss}}{y_j^{ss}} = \frac{h_i\left[A^{1/1-\alpha}\left(\frac{\gamma}{n+\delta}\right)^{\alpha/(1-\alpha)}\right]}{h_j\left[A^{1/1-\alpha}\left(\frac{\gamma}{n+\delta}\right)^{\alpha/(1-\alpha)}\right]} = \frac{h_i}{h_j}$$

Esta ecuación establece que, si no existe ninguna otra diferencia entre los países, el cociente entre los niveles de producción por trabajador del estado estacionario será exactamente igual al cociente entre las cantidades de trabajo por trabajador.



La figura muestra el resultado que se obtiene aplicando este análisis a un gran grupo de países. Calculamos el cociente que predice el modelo entre la renta de cada país y la de los Estados Unidos, basándonos en los datos sobre el nivel medio de estudios. Según los datos representados en la figura anterior, las diferencias de educación explican en parte, pero no totalmente, las diferencias de renta entre países.

En conclusión, utilizando información tanto sobre el capital humano como sobre el capital físico, nos acercamos más a los datos efectivos sobre la renta per cápita, pero no totalmente.

Antes de concluir nuestro análisis de la capacidad del capital humano para explicar las diferencias de renta entre los países, merece la pena examinar algunos aspectos que nuestro ejercicio posiblemente no esté teniendo en cuenta:

- **La calidad de la educación**: nuestro análisis de los efectos de las diferencias de educación entre los países se basa en datos sobre el número medio de años de estudio de cada país. Hemos supuesto implícitamente que la calidad de la educación no varía de unos países a otros ¿Está justificado este supuesto?

- **Las externalidades**: un importante aspecto en el que el capital humano es diferente del capital físico son las externalidades. Una externalidad es el efecto secundario que produce una actividad económica a cambio del cual no se ofrece ninguna compensación.