UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID

Economía de la información y la incertidumbre
3er curso (1º Semestre)
Grado en Economía

Parte I. Tema I:

TEORÍA DE LA DECISIÓN CON INCERTIDUMBRE: UTILIDAD ESPERADA

Bibliografía recomendada: Nicholson, capítulo 8, o Varian, cap. 12.

Tema I: Teoría de la decisión con incertidumbre: utilidad esperada

- 1.1. Loterías
- 1.2. La función de utilidad esperada de Von Neumann-Morgenstern
- 1.3. Loterías con consecuencias monetarias. Aversión al riesgo y medidas de ésta.

Tema I: Teoría de la decisión con incertidumbre: utilidad esperada

En este tema nos centramos en algunos de los elementos que caracterizan la motivación de los individuos cuando toman decisiones en situación de incertidumbre.
Veremos como el concepto de utilidad se puede generalizar en condiciones de incertidumbre.
Después, se utilizará este concepto para analizar el grado de aversión al riesgo. Es decir, estudiaremos porque los individuos intentan evitar situaciones de riesgo y cuanto estarían dispuestos a pagar por ello.

1.1. Las loterías

El estudio del comportamiento con incertidumbre se relaciona con el de la probabilidad, dado que ambos intentan comprender los juegos de azar.

Hay dos conceptos estadísticos que nos van a resultar útiles

- Probabilidad
- Valor esperado

1.1. Las loterías

Probabilidad:

La probabilidad de que se produzca un acontecimiento repetido es la frecuencia relativa con la que se producirá.

Por ejemplo, si la probabilidad de sacar cara al tirar una moneda es ½, esto es debido a que esperamos que, si se tira la moneda muchas veces, saldrá cara aproximadamente la mitad.

1.1. Las loterías

Probabilidad:

Supongamos una lotería que ofrece n premios $X_1, X_2, \ldots, X_n$, y que las probabilidades son π_1, π_2,.., π_n. Si suponemos que un jugador puede obtener un premio, se cumple:

$$\sum_{i=1}^{n} \pi_i = 1$$

Por lo tanto, entre los posible resultados, se tiene que producir uno. Para obtener una estimación del resultado medio definimos el **valor esperado**.

1.1. Las loterías

Valor esperado:

Para una lotería X con unos premios $X_1, X_2, \ldots, X_n$, y probabilidades de ganar π_1, π_2,.., π_n., el valor esperado de la lotería es:

Valor esperado = $E(X) = \pi_1 X_1 + \pi_2 X_2 + \ldots + \pi_n X_n = \sum_{i=1}^{n} \pi_i X_i$

Es la magnitud del premio que ganará el jugador en media.

1.1. Las loterías

Valor esperado (ejemplo):

Dos jugadores acuerdan tirar una moneda al aire. Si sale cara, el jugador 1 paga un euro al jugador 2, y viceversa. Desde el punto de vista del jugador 1, X_1=1 y X_2=-1. El valor esperado es:

$$1/2X_1 + 1/2X_2 = 1/2(1) + 1/2(-1) = 0$$

Por tanto, si se juega un número elevado de veces es probable que la ganancia sea muy pequeña.

1.1. Las loterías

Valor esperado (ejemplo):

Supongamos que cambian los premios, de tal forma que el jugador 1 gana 10 si sale cara y pierde 1 en caso contrario, X_1=10 y X_2=-1. El valor esperado es:

$$1/2X_1 + 1/2X_2 = 1/2(10) + 1/2(-1) = 4.5$$

Si se juega muchas veces, el jugador 1 obtendrá beneficio, por lo que es posible que esté dispuesto a pagar al jugador 2 por jugar.

Tanto el juego anterior, con valor cero, como este, si el valor esperado coincidiese con el coste de participar, ambos se denominarían **juegos justos**.

1.1. Las loterías

Valor esperado:

Por lo general, la gente se niega a participar en juegos justos. Preferirán arriesgar una mínima cantidad en juegos injustos, pero evitarán pagar mucho en juegos arriesgados pero justos.

Este hecho nos ayudará a entender los avances en la teoría de la incertidumbre.

1.1. Las loterías

Juegos justos y la paradoja de S. Petesburgo:

Un ejemplo es la paradoja de S. Petesburgo. Se tira una moneda hasta que salga cara. Si aparece en la n-ésima tirada, el jugador recibe 2^n€.

$$x_1 = \$2,\ x_2 = \$4,\ x_3 = \$8,\ldots,x_n = \$2^n$$

La probabilidad de sacar cara por primera vez en la i-ésima tirada es (1/2)i; la probabilidad de obtener (i-1) cruces y después una cara. Por lo tanto, las probabilidades son:

$$\pi_1=½,\ \pi_2= ¼,\ldots,\ \pi_n= 1/2^n$$

1.1. Las loterías

Juegos justos y la paradoja de S. Petesburgo:

El valor esperado es infinito:

$$E(X) = \pi_1 X_1 + \pi_2 X_2 + \ldots + \pi_n X_n = \sum_{i=1}^{n} \pi_i X_i$$

Sin embargo, no habrá ningún jugador dispuesto a pagar por este juego. Esta es, por tanto, la **paradoja**.

1.1. Las loterías

Utilidad esperada:

La solución de Bernoulli a esta paradoja consistía en afirmar que a los individuos no les interesa el valor monetario si no la utilidad que este les ofrece.

Si suponemos que la utilidad marginal de la renta disminuye a medida que aumenta la renta, el juego de S. Petesburgo podrá converger a un valor finito de la utilidad esperada que los jugadores estarán dispuestos a pagar por tener derecho a jugar.

Bernoulli denominó este valor de la utilidad esperada como el *valor moral* del juego porque representa cuanto vale el juego para el individuo.

1.1. Las loterías

Utilidad esperada:

Si la utilidad de cada premio viene dada por:

$$U(X_i) = \ln(X_i)$$

Se cumple que U´>0 y U´´<0, y el valor de la utilidad esperada converge a un número finito:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i U(X_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i \ln(2^i) = 1.39$$

Un individuo con este tipo de función de utilidad puede estar dispuesto a invertir recursos que de otra manera ofrecerían hasta 1,39 unidades de utilidad (una riqueza de 4€ ofrece esta utilidad).

1.2. La función de utilidad esperada de Von Neumann-Morgenstern

En esta sección, desarrollaremos los modelos matemáticos para analizar el comportamiento económico de los individuos en condiciones de incertidumbre.

Puesto que la hipótesis de que los individuos toman decisiones en situaciones de incertidumbre en función de la utilidad esperada, **Von Neumann-Morgenstern** demostraron que esta hipótesis se podía derivar de axiomas más básicos sobre el comportamiento «racional».

1.2. La función de utilidad esperada de Von Neumann-Morgenstern

El índice de utilidad Von Neumann-Morgenstern

Supongamos una lotería con premios $(x_1,\ldots x_n)$, ordenados por orden de preferencia creciente.

Ahora asignemos niveles de utilidad, por ejemplo:

x_1 = menos preferido $\Rightarrow$ $U(x_1) = 0$

x_n = mas preferido $\Rightarrow$ $U(x_n) = 1$

1.2. La función de utilidad esperada de Von Neumann-Morgenstern

El índice de utilidad Von Neumann-Morgenstern

Utilizando estos dos valores de la utilidad, el objetivo del teorema **Von Neumann-Morgenstern** consiste en demostrar que existe una forma racional de asignar números de utilidad concretos a los demás premios disponibles.

1.2. La función de utilidad esperada de Von Neumann-Morgenstern

El índice de utilidad Von Neumann-Morgenstern

Determinemos cual es la probabilidad (π_i) ante la cual un jugador se mostraría indiferente entre X_i con certeza y un juego que ofrezca los premios X_n con probabilidad π_i y X_1 con probabilidad (1- π_i).

Por tanto, la probabilidad π_i debe representar lo deseable que es el premio X_i.

1.2. La función de utilidad esperada de Von Neumann-Morgenstern

El índice de utilidad Von Neumann-Morgenstern

La técnica consiste en definir la utilidad de X_i como la utilidad esperada del juego que el individuo considera igual de deseable que X_i:

$$U(x_i) = \pi_i \cdot U(x_n) + (1 - \pi_i) \cdot U(x_1)$$

Debido a nuestra elección de la escala:

$$U(x_i) = \pi_i \cdot 1 + (1 - \pi_i) \cdot 0 = \pi_i$$

1.2. La función de utilidad esperada de Von Neumann-Morgenstern

El índice de utilidad Von Neumann-Morgenstern

Al elegir de forma razonable los números de utilidad que hay que asignar al mejor y peor premio, hemos sido capaces de demostrar que el número de utilidad asociado a cualquier otro premio es la probabiliad de ganar el mejor premio del juego que el individuo considera equivalente.

1.2. La función de utilidad esperada de Von Neumann-Morgenstern

Maximización de la utilidad esperada

Suponemos que la probabilidad π_i ha sido asignada para representar la utilidad de cualquier premio X_i y, más concretamente, que $\pi_1 = 0$ y $\pi_n = 1$.

Por tanto, un individuo racional elegirá entre distintas apuestas en función de las utilidades esperadas (es decir, en función del valor esperado de estos números indices de utilidad de **Von Neumann-Morgenstern.**

1.2. La función de utilidad esperada de Von Neumann-Morgenstern

Maximización de la utilidad esperada

Considere dos apuestas:

- Primera apuesta ofrece x_2 con probabilidad q y x_3 con probabilidad $(1-q)$:

$$\text{Utilidad esperada}(1) = q \cdot U(x_2) + (1-q) \cdot U(x_3)$$

- Segunda apuesta ofrece x_5 con probabilidad t y x_6 con probabilidad $(1-t)$

$$\text{Utilidad esperada}(2) = t \cdot U(x_5) + (1-t) \cdot U(x_6)$$

1.2. La función de utilidad esperada de Von Neumann-Morgenstern

Maximización de la utilidad esperada

Sustituyendo los números indices de la utilidad (es decir, π_2 es la utilidad de X_2, etc.)

$$\text{Utilidad esperada(1)} = q \cdot \pi_2 + (1-q) \cdot \pi_3$$
$$\text{Utilidad esperada(2)} = t \cdot \pi_5 + (1-t) \cdot \pi_6$$

El individuo prefiere la apuesta 1 a la 2 si:

$$q \cdot \pi_2 + (1-q) \cdot \pi_3 > t \cdot \pi_5 + (1-t) \cdot \pi_6$$

1.2. La función de utilidad esperada de Von Neumann-Morgenstern

Maximización de la utilidad esperada

Si los individuos cumplen los axiomas de **Von Neumann-Morgenstern** sobre el comportamiento en situaciones de incertidumbre, actuarán como si eligieran la opción que maximiza el valor esperado de su índice de utilidad **Von Neumann-Morgenstern**.

1.3. Loterías con consecuencias monetarias. Aversión al riesgo y medidas de ésta.

Aversión al riesgo

Dos loterías pueden tener el mismo valor monetario esperado y diferir en cuanto a su riesgo.

Por ejemplo, el tirar una moneda al aire por 1€ o 1.000€. Ambos son juegos justos con valor esperado 0. Sin embargo, el segundo juego es más «arriesgado».

El objetivo de este apartado consiste en definir **riesgo** y explicar la **aversión al riesgo**.

1.3. Loterías con consecuencias monetarias. Aversión al riesgo y medidas de ésta.

Aversión al riesgo

El riesgo hace referencia al grado de variabilidad.

Cuando un individuo se enfrenta a una elección entre dos juegos con el mismo valor esperado, normalmente se elige aquel cuya variabilidad en el resultado es menor.

1.3. Loterías con consecuencias monetarias. Aversión al riesgo y medidas de ésta.

Aversión al riesgo

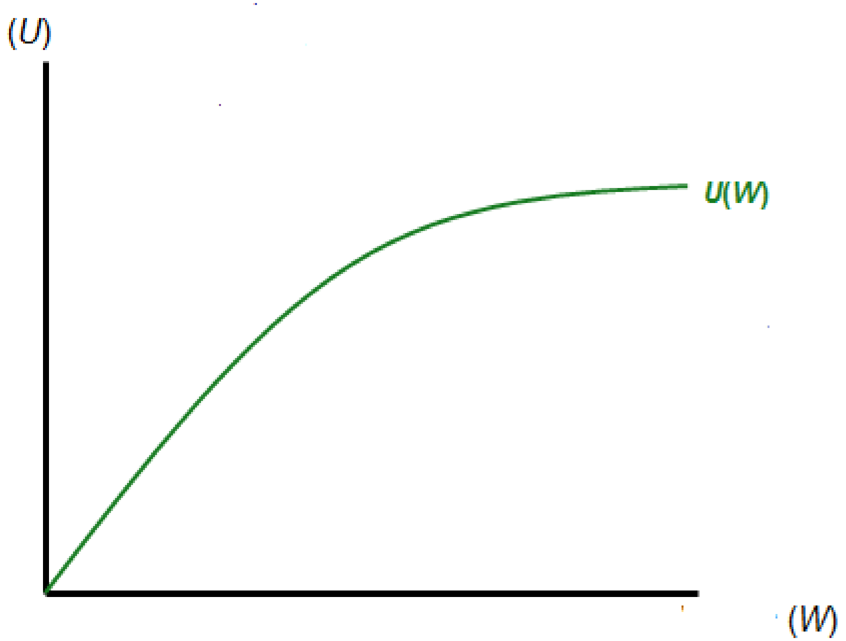
El motivo por el cual se eligen apuestas con menor variabilidad es que solemos suponer que la utilidad marginal del premio en dinero disminuye a medida que el premio aumenta en su cuantía.

Así pues, el tirar una moneda al aire por 1.000€ promete una ganancia relativamente útil de la utilidad si uno gana, pero una gran perdida. Por el contrario, una apuesta de solo un euro no tiene consecuencia, ya que la ganancia de utilidad derivada compensa a la disminución de utilidad de una perdida.

1.3. Loterías con consecuencias monetarias. Aversión al riesgo y medidas de ésta.

Aversión al riesgo

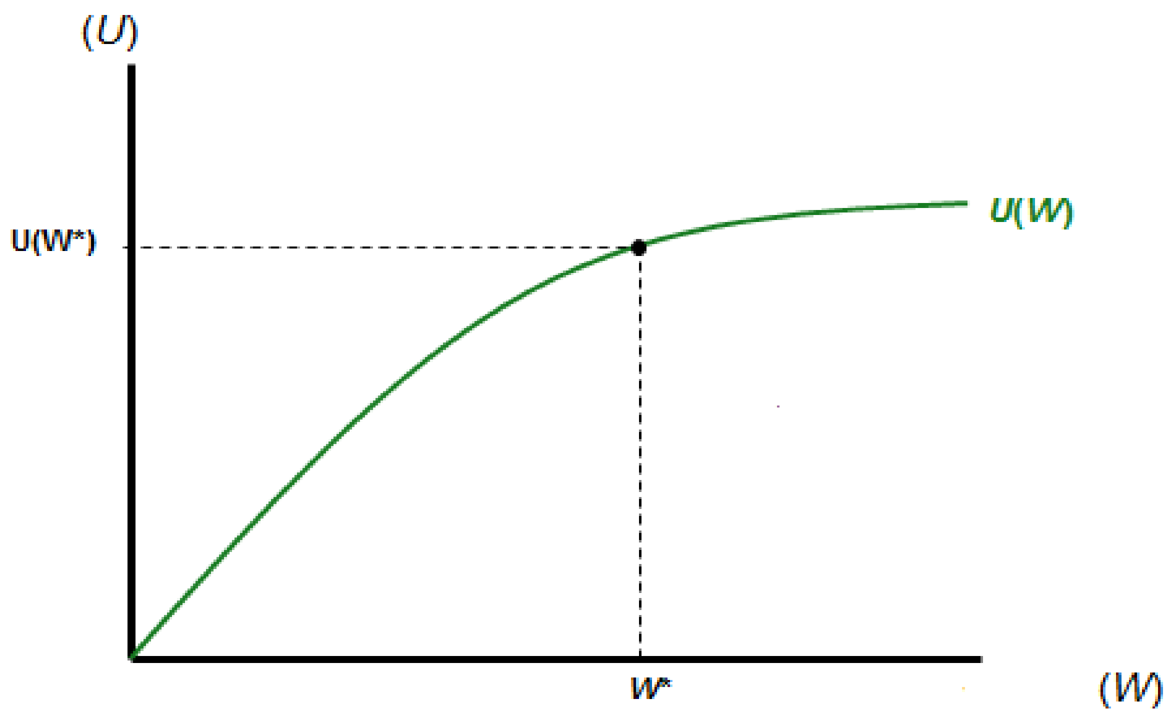
Utilidad U(W) Von Neumann-Morgenstern, que refleja la utilidad de distintos niveles de riqueza w. Es cóncava debido a que la utilidad marginal es decreciente.



1.3. Loterías con consecuencias monetarias. Aversión al riesgo y medidas de ésta.

Aversión al riesgo

La utilidad de la riqueza actual W* es U(W*)



1.3. Loterías con consecuencias monetarias. Aversión al riesgo y medidas de ésta.

Aversión al riesgo

Supongamos que se ofrece la posibilidad de participar en dos juegos justos:

50% probabilidad ganar o peerder h€

$$U^{h}(W^{*}) = \tfrac{1}{2}\, U(W^{*} + h) + \tfrac{1}{2}\, U(W^{*} - h)$$

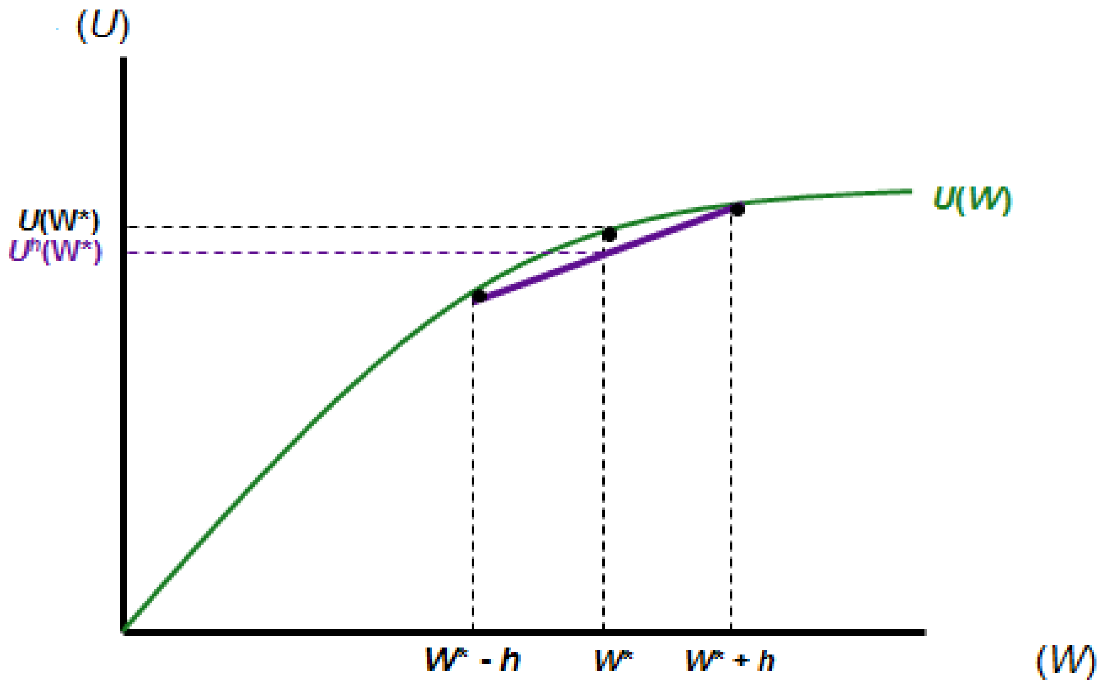
50% probabilidad ganar o peerder 2h€

$$U^{2h}(W^{*}) = \tfrac{1}{2}\, U(W^{*} + 2h) + \tfrac{1}{2}\, U(W^{*} - 2h)$$

1.3. Loterías con consecuencias monetarias. Aversión al riesgo y medidas de ésta.

Aversión al riesgo

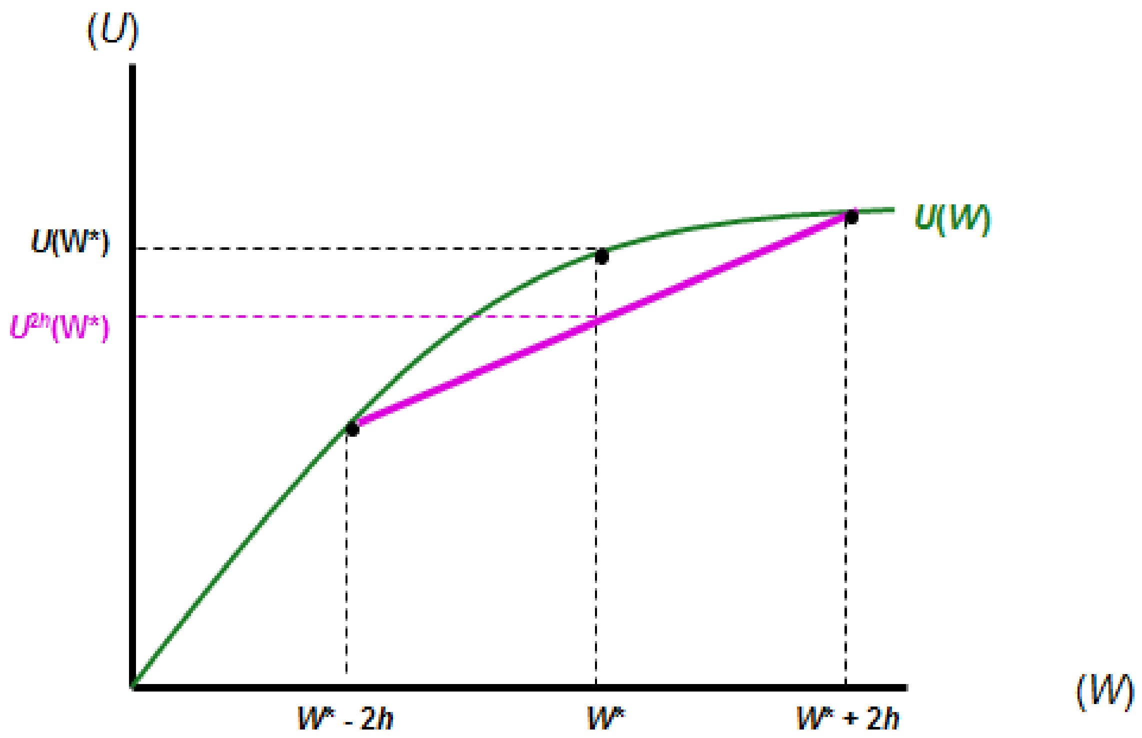
La utilidad esperada del primer juego es $U^h(W^*)$



1.3. Loterías con consecuencias monetarias. Aversión al riesgo y medidas de ésta.

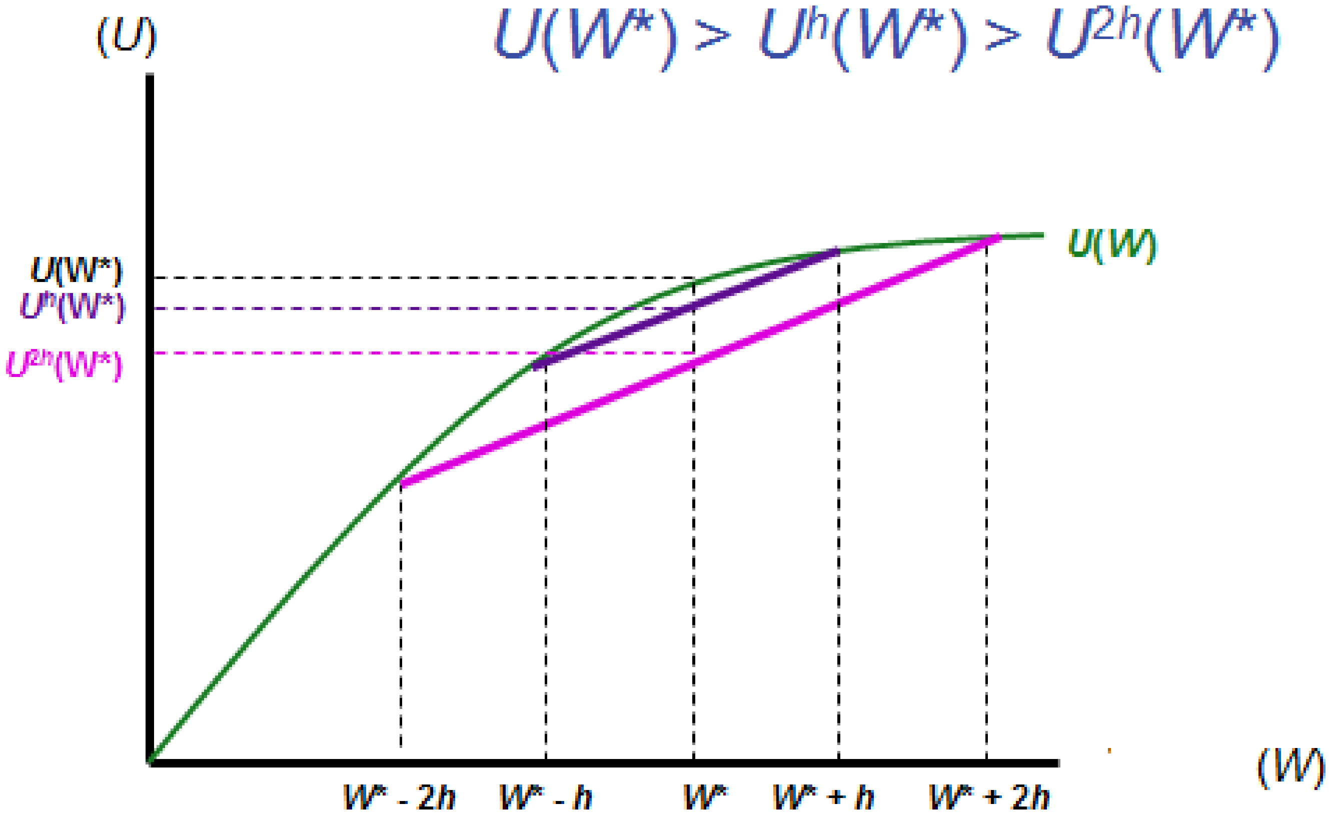
Aversión al riesgo

La utilidad esperada del segundo juego es $U^{2h}(W^*)$



1.3. Loterías con consecuencias monetarias. Aversión al riesgo y medidas de ésta.

Aversión al riesgo



1.3. Loterías con consecuencias monetarias. Aversión al riesgo y medidas de ésta.

Aversión al riesgo

El motivo es que ganar h euros significa menos para este individuo que perder h euros.

Por tanto, un individuo adverso:

- Prefiere su riqueza actual frente a la que obtendría con un juego justo.
- Y prefiere un juego con apuestas pequeñas, puesto que la ganancia genera menos utilidad que la posible pérdida.

1.3. Loterías con consecuencias monetarias. Aversión al riesgo y medidas de ésta.

Aversión al riesgo y seguros

Un individuo que rechaza las apuestas justas será considerado como adverso al riesgo.

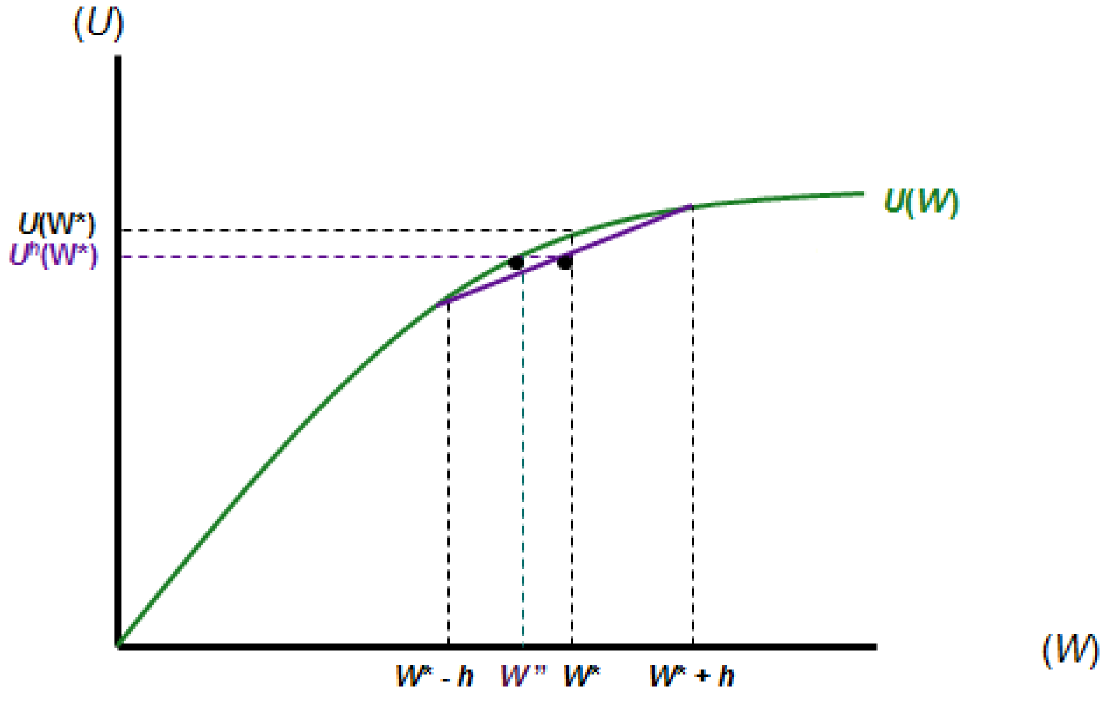
Si los individuos tienen una utilidad marginal decreciente de la riqueza, serán *adversos al riesgo*. Por tanto, estarán dispuestos a pagar para evitar participar en estos juegos.

Este es el motivo por el cual se contratan los seguros.

1.3. Loterías con consecuencias monetarias. Aversión al riesgo y medidas de ésta.

Aversión al riesgo y seguros

Un nivel de riqueza W´´ ofrece la misma utilidad que la participación en el juego. Por tanto, el individuo estará dispuesto a pagar W*-W´´ para evitar el juego.



1.3. Loterías con consecuencias monetarias. Aversión al riesgo y medidas de ésta.

Disponibilidad para pagar un seguro

Consideramos una persona con una riqueza actual de 100,000€ que afronta la posibilidad del 25% de perder su automovil de 20,000€.

Suponemos también que su índice de utilidad de von Neumann-Morgenstern es

$$U(W) = ln\ (W)$$

1.3. Loterías con consecuencias monetarias. Aversión al riesgo y medidas de ésta.

Disponibilidad para pagar un seguro

Si esta persona no contrata un seguro, su utilidad esperada sera:

$$E(U) = 0.75U(100{,}000) + 0.25U(80{,}000)$$

$$E(U) = 0.75\ ln(100{,}000) + 0.25\ ln(80{,}000)$$

$$E(U) = 11.45714$$

En esta situación, una prima de seguros justa seria 5,000€ (25% de 20,000€).

$$E(U) = \mathrm{U}(95{,}000) = \ln(95{,}000) = 11{,}46163$$

1.3. Loterías con consecuencias monetarias. Aversión al riesgo y medidas de ésta.

Disponibilidad para pagar un seguro

Cuanto estaria dispuesto a pagar el individuo para protegerse completamente?

$$E(U) = U(100{,}000 - x) = ln(100{,}000 - x) = 11.45714$$

$$100{,}000 - x = e^{11.45714}$$

$$x = 5{,}426$$

La prima máxima es 5,426€

1.3. Loterías con consecuencias monetarias. Aversión al riesgo y medidas de ésta.

Cálculo de la aversión al riesgo

La medida más comunmente utilizada de aversión al riesgo fue desarrollada por Pratt

$$r(W) = -\frac{U''(W)}{U'(W)}$$

Para los adversos al riesgo, $U''(W) < 0$

- $r(W)$ será positivo
- $r(W)$ no está afectado por que orden von Nuemann-Morganstern se utilice

1.3. Loterías con consecuencias monetarias. Aversión al riesgo y medidas de ésta.

Cálculo de la aversión al riesgo

La principal característica del indicador de aversión al riesgo de Pratt es que es proporcional a la cantidad que un individuo pagará por asegurarse ante una apuesta justa.

1.3. Loterías con consecuencias monetarias. Aversión al riesgo y medidas de ésta.

Cálculo de la aversión al riesgo

Suponga que las ganancias de una apuesta justa vienen dadas por la variable aleatoria *h.* Puesto que la apuesta es justa:

$$E(h) = 0$$

Sea *p* la cuantía de la prima el seguro que haría que el individuo fuera indiferente entre aceptar la apuesta justa h y pagar p con certeza para evitar el juego:

$$E[U(W + h)] = U(W - p)$$

Siendo W la riqueza actual.

1.3. Loterías con consecuencias monetarias. Aversión al riesgo y medidas de ésta.

Cálculo de la aversión al riesgo

Expandimos ambos lagos de la igualdad mediante aproximaciones de Taylor.

Puesto que p es fijo, mediante una aproximación lineal del lado derecho de la ecuación:

$$U(W - p) = U(W) - pU'(W) + \text{términos de orden superior}$$

1.3. Loterías con consecuencias monetarias. Aversión al riesgo y medidas de ésta.

Cálculo de la aversión al riesgo

Por el lado izquierdo necesitamos una aproximación cuadrática para permitir la variabilidad en el juego, h:

$$E[U(W + h)] = E[U(W) - hU'(W) + h^2/2\ U''(W)$$

$$+ \text{Términos de orden superior}$$

$$E[U(W + h)] = U(W) - E(h)U'(W) + E(h^2)/2\ U''(W)$$

$$+ \text{Términos de orden superior}$$

1.3. Loterías con consecuencias monetarias. Aversión al riesgo y medidas de ésta.

Cálculo de la aversión al riesgo

Recordando que $E(h)=0$, y dejando de lado los términos de orden superior, y utilizando la constante k para sustituir $E(h^2)/2$, obtenemos

$$U(W) - pU'(W) \cong U(W) + kU''(W)$$

$$p \cong -\frac{kU''(W)}{U'(W)} = kr(W)$$

1.3. Loterías con consecuencias monetarias. Aversión al riesgo y medidas de ésta.

Cálculo de la aversión al riesgo

Por tanto, la cantidad que está dispuesto a pagar un individuo adverso al riesgo es proporcional al indicador de Pratt.

Por tanto, es posible utilizar la información procedente del mercado para aprender bastante sobre las actitudes ante situaciones arriesgadas.

1.3. Loterías con consecuencias monetarias. Aversión al riesgo y medidas de ésta.

Aversión al riesgo y riqueza

Una cuestión importante es saber si la aversión al riesgo aumenta o disminuye con la riqueza.

No necesariamente la aversión al riesgo se reduce cuando aumenta la riqueza:

- Posiblemente la utilidad marginal decreciente hará que las perdidas potenciales sean menos graves para los individuos con gran riqueza
- Aunque, la utilidad marginal decreciente tambien hace que las ganancias del juego sean menos atractivas

El resultado neto es indeterminado y depende de la función de utilidad.

1.3. Loterías con consecuencias monetarias. Aversión al riesgo y medidas de ésta.

Aversión al riesgo y riqueza

Si la utilidad es cuadratica respecto de la riqueza:

$$U(W) = a + bW + cW^2$$

donde $b > 0$ y $c < 0$, el indicador de aversión al riesgo de Pratt es:

$$r(W) = -\frac{U''(W)}{U(W)} = \frac{-2c}{b + 2cW}$$

En este caso, la aversión al riesgo aumenta con la riqueza

1.3. Loterías con consecuencias monetarias. Aversión al riesgo y medidas de ésta.

Aversión al riesgo y riqueza

Si la utilidad es logaritmica respecto de la riqueza:

$$U(W) = ln\ (W)$$

Siendo $W > 0$, el indicador de Pratt de aversión al riesgo será:

$$r(W) = -\frac{U''(W)}{U(W)} = \frac{1}{W}$$

La aversión al riesgo disminuye con la riqueza

1.3. Loterías con consecuencias monetarias. Aversión al riesgo y medidas de ésta.

Aversión al riesgo y riqueza

Si la utilidad es exponencial

$$U(W) = -e^{-AW} = -exp\,(-AW)$$

siendo *A* una constante positiva, el indicador de Pratt de aversión al riesgo:

$$r(W) = -\frac{U''(W)}{U(W)} = \frac{A^2 e^{-AW}}{Ae^{-AW}} = A$$

La aversión al riesgo es constante con el nivel de ingresos.

1.3. Loterías con consecuencias monetarias. Aversión al riesgo y medidas de ésta.

Aversión al riesgo relativa

Parece improbable que la disponibilidad a pagar para evitar un determinado juego sea independiente del nivel de riqueza del individuo.

Un supuesto más atractivo puede ser que la disponibilidad a pagar es inversamente proporcional a la riqueza

Aversión al riesgo relativa

Por tanto, definimos la aversión relativa al riesgo

$$rr(W) = Wr(W) = -W\frac{U''(W)}{U'(W)}$$

1.3. Loterías con consecuencias monetarias. Aversión al riesgo y medidas de ésta.

Aversión al riesgo relativa

La función de utilidad

$$U(W) = W^R/R \text{ para } R < 1, \neq 0$$

Muestra una aversión al riesgo absoluta decreciente

$$r(W) = -\frac{U''(W)}{U'(W)} = -\frac{(R-1)W^{R-2}}{W^{R-1}} = -\frac{(R-1)}{W}$$

Pero una aversión relativa constante:

$$rr(W) = Wr(W) = -(R-1) = 1-R$$

1.3. Loterías con consecuencias monetarias. Aversión al riesgo y medidas de ésta.

Aversión al riesgo relativa

La evidencia empírica suele ser consistente con valores de R del intervalo de -3 a -1.

Por tanto, parece que los individuos son algo más adversos al riesgo que lo que implica la función de utilidad logaritmica, aunque en muchas aplicaciones esta función ofrece una aproximacion razonable.