ECONOMIA DE LA INFORMACION Y LA INCERTIDUMBRE

EJERCICIOS

Ejercicio 1

Sea un espacio de elección con cuatro alternativas *A, B, C, D,* y un individuo cuyas preferencias son $A \succ B; A \succ C; A \approx D; B \succ C; D \succ B; D \succ C$ **. ¿Existe alguna función de utilidad que represente estas preferencias? En caso afirmativo dé un ejemplo. En caso negativo, explique (utilizando los conceptos de la asignatura) por qué.**

Sí que la hay. Por ejemplo: U(A)=U(D)=5, U(B)=4, U(C)=3, y hay infinitas más!.

Ejercicio 2

¿Cuál sería el precio realmente justo en cada uno de los siguientes juegos?

a) **Ganar 1000 con una probabilidad de 0.5 y perder 1000 con una probabilidad de 0.5**
b) **Ganar 1000 con una probabilidad de 0.6 y perder 1000 con una probabilidad de 0.4**
c) **Ganar 1000 con una probabilidad de 0.7, perder 2000 con una probabilidad de 0.2 y perder 10000 con una probabilidad de 0.1**

El precio justo estará dado por el valor esperado del premio de cada juego:

a) E(premio)=1000*0.5+(-1000)*0.5=500-500=0
b) E(premio)=1000*0.6+(-1000)*0.4=600-400=200
c) E(premio)=1000*0.7+(-2000)*0.2+(-10000)*0.1=700-400-1000=-700

Ejercicio 3

Un individuo compra 12 huevos y tiene que llevarlos a casa. Hacer viajes no le cuesta nada, pero en cada viaje que haga hay 50% de probabilidad de que <u>todos</u> los huevos se rompan.

(a) Indique las consecuencias (en términos de huevos que llegan a casa) y las probabilidades de las loterías 'hacer un sólo viaje con los 12 huevos' y 'hacer dos viajes llevando 6 huevos en cada uno',

Con un solo viaje llegan 0 o 12 huevos, cada consecuencia con probabilidad ½. Si se hacen dos viajes, pueden llegar 0, 6 o 12 huevos, dependiendo de que se rompan en todos, uno o ningún viaje. Teniendo en cuenta que cada viaje es independiente del otro, se sigue que las probabilidades de estas consecuencias son respectivamente ¼, ½, ¼.

(b) en media, ¿cuántos huevos llegarían con cada lotería?,

Con ambas loterías el número medio es 6.

(c) suponga que las utilidades de las consecuencias 'llegan 0, 6 , 12 huevos a casa' son respectivamente 6, 10 y 12, y que las preferencias del individuo satisfacen las hipótesis del modelo de von Neumann-Morgenstern, ¿preferirá hacer 1 o 2 viajes?,

El individuo elegirá aquella lotería con mayor utilidad esperada.

Para un viaje: ½*6 + ½*12= 9

Para dos viajes: 0,25*6+1/2*10+0,25*12=9,5.

Por tanto, hará dos viajes.

(d) suponga que también puede hacer 3 viajes, llevando 4 huevos en cada uno, y que la utilidad de las consecuencias 'llegan 4, 8 huevos a casa' son respectivamente 9 y 10,8; ¿preferiría hacer 3 viajes?,

Hacer tres viajes tiene cuatro consecuencias posibles: 0, 4, 8 y 12 huevos. Las probabilidades respectivas son 1/8, 3/8, 3/8 y 1/8.

Note por ejemplo que hay tres maneras diferentes de que lleguen 8 huevos, dependiendo de que los otros cuatro se rompan en el 1º, 2º o 3er viaje. Cada uno de estos sucesos tiene probabilidad 1/8=1/2*1/2*1/2. Por tanto, la utilidad esperada de hacer tres viajes será: 9,675, que es mayor a la de hacer 1 o 2 viajes.

(e) suponga ahora que cada viaje le redujera su utilidad en c útiles, ¿cuánto tendría que valer c para que prefiriese llevarlo todo en un único viaje?

Si hacer cada viaje tiene un coste de c, en términos de utilidad, la utilidad de toda consecuencia será igual a la utilidad previa menos n*c, donde n denota el número de viajes que se hagan.

Para un viaje: 9-c
Para dos viajes: 9,5-2*c

Claramente, se preferirá un viaje a dos siempre que se cumpla c>0,5, y esta condición asegura que prefieran 1 a 3.

Ejercicio 4

El señor Z tiene riqueza *inicial* igual a 5000 euros, y va a apostar 20 euros a que el Atlético de Madrid ganará la liga — en tal caso, Z recibiría un premio de 200 euros. Z tiene una función de utilidad del dinero logarítmica $u(w) = Ln(w)$, donde *w* indica riqueza *final*. Teniendo en cuenta todo esto, ¿con *al menos* cuánta probabilidad debe pensar Z que el Atlético ganará? ¿Y si el premio fuera igual a 400 euros? ¿Y si fuera 40? ¿Si usted trabajara para una empresa de apuestas, qué conclusión general sacaría de este análisis?

Z tiene dos opciones o loterías, es decir, apostar o no apostar. La lotería "apostar" tiene dos consecuencias en términos de nivel de riqueza final: 5000 – 20+200= 5180 si gana la apuesta (probabilidad p), y 5000-20= 4980 si pierde la apuesta (probabilidad 1-p). La lotería "no apostar" es segura, pues la única consecuencia posible es 5000.
Ahora, para que decida apostar, se debe cumplir que la utilidad esperada de apostar sea mayor que la de no apostar:

$p \cdot \ln(5180) + (1-p)\ln(4980) > \ln(5000) \leftrightarrow p > 0{,}118$

Lo único que cambia en las loterías si es premio son 400 euros es que la consecuencia "ganar" en la primera lotería es ahora igual a 5380. Un razonamiento análogo al anterior lleva a p>0,052.

Para un premio de 40, la probabilidad debería ser mayor de 0,5.

La conclusión es que cuanto más pequeña sea la probabilidad de que gane el atlético o el equipo que sea, mas premio habrá que dar en caso de ganar para conseguir que la gente apueste.

Ejercicio 5

Considere un agricultor con función de utilidad del dinero logarítmica $u(w) = Ln(w)$, donde w representa su nivel de riqueza final. La riqueza inicial del agricultor es de 25 euros. El agricultor proyecta comprar semillas modificadas genéticamente para resistir a las plagas. Los ingresos serán de 80 euros <u>si llueve</u> y de 5 euros <u>si no llueve</u>. La probabilidad de lluvia es del 50% y el coste de la inversión en semillas asciende a 20 euros. Si no invierte en semillas, los ingresos serán de 40 euros si llueve y de 5 si no llueve. Responda: (a) ¿Le interesa llevar el proyecto adelante?, (b) ¿A partir de qué probabilidad de lluvia invertir es preferible a no invertir?

Llamaremos A al proyecto de inversión en semillas modificadas, y B a la alternativa de seguir como siempre. La siguiente matriz de pagos indica las consecuencias monetarias de cada lotería, teniendo en cuenta que a los ingresos del proyecto A en cada estado de la naturaleza han de serles restados los costes de la inversión. Note asimismo que siempre que sumamos la riqueza inicial de 25:

	Llueve	No llueve
A	85	10
B	65	30

a) La utilidad esperada del proyecto A es:

UE(A)=0,5*ln(85)+0,5*ln(10)=3,37

Y la del proyecto B:

UE(B)=0,5*ln(65)+0,5*ln(30)=3,79

Preferirá por tanto no invertir en semillas.

b) Sea p la probabilidad de lluvia. Se requiere que la utilidad esperada del proyecto A sea mayor que la del B:

UE(A) = p*ln(85)+(1-p)*ln(10)>UE(B) = p*ln(65)+(1-p)*ln(30)
P > 0,803

Ejercicio 6

Supongamos que el ayuntamiento de una gran ciudad se plantea controlar el aparcamiento en su área central. Para ello puede implementar una de estas dos políticas: aumentar la vigilancia policial en un 10%, o aumentar las multas en un 10%. Responda: (a) Tras la implementación de cada una de las políticas, ¿cuál es el valor esperado de un conductor si decide aparcar en zona prohibida? (b) ¿Qué política será la más disuasoria si los conductores son aversos al riesgo? ¿Y si son amantes del riesgo? ¿Y si son neutrales ante el riesgo? Explique sus respuestas gráficamente. (c) Si el objetivo del ayuntamiento fuera meramente recaudatorio, ¿qué política sería más beneficiosa para las arcas municipales?

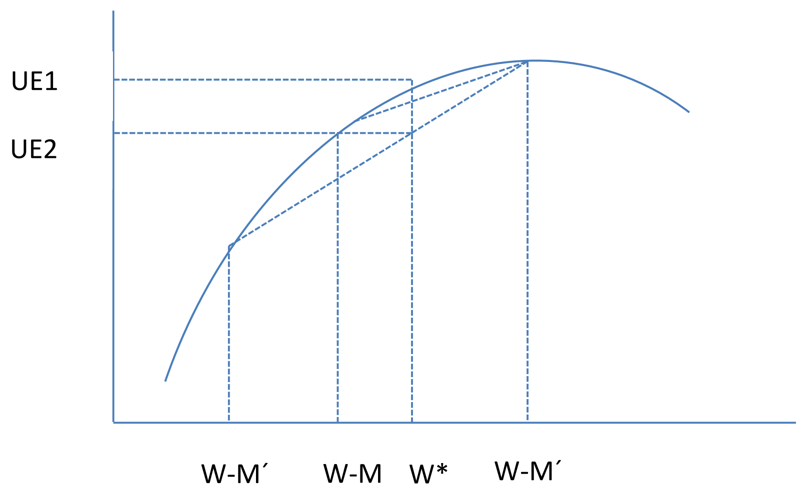
Antes de implementar ninguna de las políticas, sea W el nivel de riqueza de un conductor cualquiera, p la probabilidad de ser multado por aparcar indebidamente, y M la multa. La lotería "aparcar indebidamente" tiene dos consecuencias en términos de riqueza: (1) W-M, con una probabilidad p; 2) W, con una probabilidad 1-p.

La política 1 (aumentar la vigilancia) incrementará la probabilidad de ser multado en un 10%, con lo cual la riqueza esperada (valor esperado si se aparca indebidamente) del conductor será E1=W-p(1+0,1)M=W-1,1pM=W*

Con la política 2 (aumentar en un 10% la cuantía de la multa), la multa pasa a ser M´=M(1+0,1), por lo que la riqueza esperada del conductor sería:

E2=W-pM(1+0,1)=W-1,1pM=W*

Nótese que la riqueza esperada del conductor con ambas políticas es la misma (W*) aunque con la segunda política una de las consecuencias es peor. Teniendo esto en cuenta, un argumento gráfico sencillo muestra que la utilidad esperada de aparcar indebidamente será menor con la política 2 para los conductores aversos al riesgo. Por lo tanto, esta segunda política tendrá un mayor efecto disuasorio que la de incrementar la vigilancia:



Razonamientos gráficos análogos demuestran que ambas políticas son igual de disuasorias para un conductor neutral al riesgo, mientras que la política más disuasoria sería la de incrementar la vigilancia para los conductores amantes del riesgo.

Para el último apartado, denotemos por p´y p´´ el porcentaje de infractores con la política 1 y 2, respectivamente. Acabamos de demostrar que p´>p´´ si la mayoría de conductores son adversos al riesgo. Por tanto, concluimos que los ingresos esperados del ayuntamiento (por multas) serán mayores con la política 1 de mayor inspección (p´*1,1*p*M) que con la 2 de mayores multas (p´´*1,1*M).

Ejercicio 7

Suponga w1 > w2 > w3 > w4, y que u(w1) + u(w4) = u(w2) + u(w3); donde las w denotan niveles de riqueza, y u es la función de utilidad de dinero de un individuo. Si es averso al riesgo y maximiza la utilidad esperada, preferirá una lotería que le ofrezca ganar w2 y w3 con una probabilidades del 50% frente a ganar w1 y w4 con probabilidades del 50%, ya que esta última opción implica una varianza (riesgo) de resultados más elevada. ¿Cierto o falso?

Falso. La utilidad esperada de la lotería consistente en obtener W1 y W4 con un 50% de probabilidades cada una es:

UE = 0,5 (U(W1)+U(W4))

Mientras que la utilidad esperada de la lotería consistente en obtener W2 y W3 con un 50% de probabilidades cada una es

UE = 0,5 (U(W2)+U(W3))

Ahora, como el enunciado nos indica que

U(W1)+U(W4) = U(W2)+U(W3)

Se sique que las utilidades esperadas tiene el mismo valor, por lo que el individuo estará indiferente entre una lotería y otra.

Ejercicio 8

Un agricultor de secano está considerando qué cultivar la próxima temporada. Tiene dos alternativas posibles (trigo y girasol), y su riqueza *final* con cada cultivo variará según haya suficientes precipitaciones (probabilidad 50%) o sequía (probabilidad 50%), de acuerdo con la siguiente tabla:

Cultivo	Lluvia suficiente	Sequía
Trigo	**28.000 euros**	**10.000 euros**
Girasol	**19.000 euros**	**15.000 euros**

Suponga que su función de utilidad del dinero es *u(w) = Lnw*.

a. Si sólo puede plantar un cultivo, ¿cuál elegirá?

Sea T (G) la lotería de plantar trigo (girasol). La utilidad esperada de cada una es:

UE(T) = 0,5*ln(28000)+0,5*ln(10000)= 9,725 < UE(G) = 0,5*ln(19000)+0,5*ln(15000)=9,734

En base a los valores de la utilidad esperada, preferirá plantar girasol.

b. Si puede plantar 1/2 de parcela con trigo y el resto con girasol, ¿preferirá esta opción a especializarse en un cultivo? (Nota: Si planta un porcentaje μ de la parcela con un cultivo, los ingresos correspondientes *a ese cultivo* serán iguales a μ% de los que obtendría si plantara toda la parcela, *en cualquier contingencia*).

La lotería plantar la mitad de trigo tiene dos consecuencias, cada una con probabilidad ½. La consecuencia si llueve es 9500 + 14000 = 23500, y si no llueve 500 + 7500 = 12500. La utilidad esperada de esta lotería es.

UE (T/2) = 0,5*ln(23500)+0,5*ln(12500)=9,749

Por lo tanto, preferirá diversificar.

c. ¿Cuál es el porcentaje óptimo μº que debería plantar de trigo? Pista: Resuelva asumiendo solución interior y aplicando técnicas de optimización matemática.

La lotería plantar μ% de trigo tiene dos consecuencias con probabilidades ½ ambas. La consecuencia si llueve es 28000 μ +19000(1- μ) = 19000 + 9000 μ, y si no llueve es 10000 μ + 15000 (1- μ) = 15000 - 5000 μ. Se sigue que la utilidad esperada de la lotería tiene la siguiente expresión:

UE(T/ μ) = 0,5*ln(19000+9000 μ) + 0,5*ln(15000-5000 μ)

La condición de primer orden es:

$$\frac{dU(T/\mu)}{dx} = \frac{9000}{2(19000+9000\mu)} + \frac{(-5000)}{2(15000-5000\mu)} = 0$$

Operando se llega a μ = 0,4, que da una utilidad esperada de 9,75.

d. En el caso c), suponga que una aseguradora ofrece un contrato de seguro *sólo para los agricultores que cultiven exclusivamente trigo*. Cuesta 4000 euros y da una indemnización de 8000 euros en caso de sequía. ¿Contrataría el agricultor este seguro o preferiría plantar la combinación óptima hallada en c)?

La lotería trigo + seguro tiene dos consecuencias con probabilidad ½ ambas. La consecuencia si llueve es 28000-4000 = 24000, y si no llueve 10000+8000-4000=14000. La utilidad esperada es de 9,816. Por tanto, si contrataría un seguro.

Ejercicio 9

Un individuo está planificando sus ahorros futuros. Por simplificar, suponemos que sólo hay dos momentos de tiempo: (1) presente y (2) futuro. Su renta presente es de Y_1 euros y debe decidir qué proporción ahorra de ella. Los ahorros se revalorizan un r % con una probabilidad p, pero también existe una probabilidad 1-p de que <u>pierdan</u> –r % de su valor. El consumo presente C_1 es la diferencia entre lo ingresado (Y_1) y lo ahorrado, y el consumo futuro C_2 será igual a la renta futura Y_2 más <u>el ahorro y su rentabilidad</u>. La utilidad de la consecuencia 'consumir C_1 ahora y C_2 en el futuro' es igual a $Ln(C_1) + 0{,}6 \cdot Ln(C_2)$, donde Ln denota logaritmo neperiano.

(a) Indique las consecuencias (en términos de utilidades) y las probabilidades de la lotería 'ahorrar una proporción s';

Hay dos consecuencias (no/si) se pierde dinero, con probabilidades p y (1-p), respectivamente. La utilidad de la primera consecuencia es:

$$\ln[(1-s)Y_1] + 0{,}6\ln[Y_2 + (1+r)sY_1]$$

Y la de la segunda:

$$\ln[(1-s)Y_1] + 0{,}6\ln[Y_2 + (1-r)sY_1]$$

(b) si $Y_1 = Y_2 = 100$, r = 6, y p = 0,9, ¿preferirá ahorrar el 50 o el 25% de su renta presente?;

Con estos datos, la utilidad esperada de la lotería ahorrar s es 6,92 si s=0,5 y 7,21 si s=0,25. Por tanto, ahorrara el 25%.

(c) si $Y_1 = Y_2 = 100$, r = 6, ¿para qué valor de la probabilidad p estará indiferente entre ahorrar una cosa u otra?;

Teniendo en cuenta los resultados obtenidos en el apartado previo, para aquel valor p tal que p*6,23+(1-p)*0,69=p*6,44+(1-p)*0,72. Dado que este igualdad es claramente imposible para cualquier p entre 0 y 1, se sigue que no puede estar indiferente. Siempre preferirá ahorrar el 25%.

(d) si $Y_2 = 0$, utilice técnicas de optimización matemática y halle el valor de s óptimo.

Se trata de maximizar la utilidad esperada:

$$p\cdot[\ln[(1-s)Y_1] + 0{,}6\ln[Y_2 + (1+r)sY_1]] + (1-p)\cdot[\ln[(1-s)Y_1] + 0{,}6\ln[Y_2 + (1+r)sY_1]] =$$
$$0{,}6\cdot p\cdot\ln(1+r) + 0{,}6\cdot\ln(s) + 1{,}6\cdot\ln(Y_1) + 0{,}6\cdot(1-p)\cdot\ln(1-r)$$

La condición de primer orden:

$$\frac{\partial UE}{\partial s} = \frac{-1}{1-s} + \frac{0,6}{s} = 0 \longrightarrow \qquad s = 0,375$$

Ejercicio 10

Suponga que un agricultor tiene una cantidad inicial de trigo de 1000 kg. Debe decidir qué cantidad consumir y qué cantidad plantar para obtener más trigo al año siguiente. Si llueve obtendrá 10kg. de trigo por cada kg. que planta. En cambio, si no llueve obtendrá solo 5 kg. de trigo por cada kg. plantado. La probabilidad de que llueva es ½. La función de utilidad de este individuo es u(c0,c1) donde c0 y c1 son el consumo en el primer y segundo periodo. El problema que se plantea el agricultor es cuando trigo plantar.

a) **¿Cuáles son los planes de consumo en este caso?**
b) **¿Cuál es la cantidad optima a plantar?**

a) Sea q la cantidad plantada. Entonces, en el primer periodo el consumo será 1000 – q, dado que en el primer periodo no hay incertidumbre. En el segundo periodo su consumo será 10q con probabilidad ½ y 5q con probabilidad ½. El agricultor no elige cuál será su consumo mañana, sino dos valores posibles del consumo que se dan con una determinada probabilidad. Eso es un plan contingente de consumo que depende de su variable de elección q.

b) Con probabilidad ½ llueve y entonces el agricultor tendrá una utilidad igual a u(1000-q,10q) y con probabilidad ½ no llueve y su utilidad será distinta e igual a u(1000-q,5q). La hipótesis de la utilidad esperada postula que podemos plantear el problema de escoger la cantidad óptima a plantar de forma que el agricultor maximiza el valor esperado de su utilidad, es decir:

$$\max_{q} \qquad \frac{1}{2}u(1000-q,10q)+\frac{1}{2}u(1000-q,5q)$$

Ejercicio 11

Gómez es propietario de un inmueble que quiere vender. A día de hoy puede obtener 10.000 euros, pero también puede esperar un año, por si el mercado mejora. Gómez piensa que, con un 25% de probabilidad, el mercado inmobiliario irá a peor y que sólo venderá por 8.000 euros, mientras que el mercado mejorará con un 75% y entonces vendería por Y euros. La función de utilidad del dinero de Gómez es $u(x)=\sqrt{x}$, y su riqueza inicial sin contar el inmueble es de 1.000 euros. Por simplificar, suponga que a Gómez le da igual obtener M euros ahora que dentro de un año. Responda *razonadamente*:

a) **Si el tipo de interés a un año es cero (y no hay inflación), ¿a cuánto tiene que ascender Y para que Gómez esté indiferente entre vender ahora o esperar un año? ¿Y si el tipo de interés fuera del 10%?**

Gómez puede elegir entre dos loterías, es decir, vender ahora o en un año. La primera es una lotería segura donde su riqueza final sería igual a 1000 + 10000 (1+r), donde r indica el tipo de interés. La segunda lotería tiene dos consecuencias posibles: 1000+8000 con probabilidad del 25% o 1000+Y con probabilidad 75%. Para estar indiferente entre una y otro deben tener la misma utilidad esperada:

$$\sqrt{11000+10000\cdot r} = 0{,}25\cdot\sqrt{9000}+0{,}75\cdot\sqrt{1000+Y}$$

Si r=0 ; Y = 10711

Si r=0,1; Y = 12094,8

b) **Suponga ahora Y = 13.000 e interés cero. Si la probabilidad de que el mercado mejore el año que viene se reduce hasta el p % por la crisis económica, ¿qué probabilidad p le dejaría indiferente a Gómez entre vender ahora y no vender?**

Para la indiferencia se requiere:

$\sqrt{11000}=(1-p)\cdot\sqrt{9000}+p\cdot\sqrt{1000+13000}$, entonces p=0,43

Ejercicio 12

Un banco tiene unos fondos de 1000 euros y dos maneras de invertirlos: (i) Bonos del Estado al 3% o (ii) prestarlos a una PYME al 5%. El problema con los préstamos es que a veces no se devuelven (los bonos, por el contrario, son totalmente seguros). Inicialmente, el banco estima en un 1% la tasa de morosidad. Suponemos que el banco no tiene costes, con lo cual su beneficio final coincide con los intereses obtenidos con la inversión (para el caso en el que el préstamo no se devuelve, no obstante, el banco incurre en unas pérdidas iguales al importe del préstamo). El banco realizará aquella inversión con mayor beneficio esperado. Responda *razonadamente*:

a) **¿Qué hará el banco: Invertir los 1000 € en (i) bonos o (ii) en el préstamo?**

Invertir en bonos es una lotería segura con beneficio 1000*0,03 = 30 euros. El préstamo, por el contrario, tiene dos consecuencias: 50 euros con probabilidad 0,99 o -1000 euros con probabilidad 0,01. Por tanto, el beneficio esperado de prestar a la PYME es de 50*0,99-1000*0,01=39,5. Así pues, el banco concederá el préstamo a la PYME.

b) **Suponga ahora que, por efecto de una crisis, la tasa de morosidad sube al 2% ¿cambia su respuesta a la pregunta anterior? ¿Qué nombre recibe en economía la desaparición de un mercado como en este ejemplo?**

Siguiendo un razonamiento análogo, concluimos que el beneficio esperado de prestar a la PYME es 29=50*0,98-10000*0,02. Por tanto, ahora preferirá invertir en bonos.

Este hecho ilustra un fenómeno, el de selección adversa.

c) **Como medida de choque para evitar este fenómeno, el gobierno se plantea variar el tipo de interés de los bonos. Si la tasa de morosidad es del 2%, ¿hasta qué tipo deberá llegar?**

Hasta una tasa a la cual los bancos estén indiferentes entre el bono y el préstamo:
1000*r=29, es decir, r=2,9%

Ejercicio 13

Las rentabilidades de dos activos (X y Z) dependen de que resulte elegido un gobierno liberal (probabilidad 60%) o intervencionista (probabilidad 40%), de acuerdo con la siguiente tabla:

Activo	**Liberal**	**Intervencionista**
X	**12,5%**	**-5%**
Z	**3%**	**9%**

Considere un inversor con función de utilidad del dinero u(x)=ln(x), una riqueza inicial de 500 euros, y que quiere invertir 100 de estos euros en X y Z. Si la cartera θ invierte un porcentaje θ de los 100 euros en el activo X, y el restante 1- θ en Z. Responda a lo siguiente: a) Indique los posibles niveles de riqueza final que pueden alcanzarse con la lotería cartera θ, así como sus probabilidades respectivas; b) ¿qué lotería tiene mayor valor esperado (es decir, para que valor de θ se maximiza el valor esperado de la correspondiente lotería cartera θ)?; c) ¿qué lotería maximiza la utilidad esperada? (aplique técnicas básicas de maximización matemática, indicando finalmente el porcentaje θ óptimo) ; d) explique intuitivamente porque la respuesta a b) y c) no coinciden.

(a) Llamemos L_θ a la lotería correspondiente a la cartera θ. Sus consecuencias y probabilidades respectivas son:

500 + 100·θ·0,125 + 100·(1-θ)·0,03 = 503 + 9,5·θ con probabilidad 0,6

500 + 100·θ·(-0,05) + 100·(1-θ)·0,09 = 509 - 14·θ con probabilidad 0,4

(b) El valor esperado de L_θ es 0,6·(503 + 9,5·θ) + 0,4·(509 - 14·θ) = 505,4 +0,1·θ

Teniendo en cuenta que θ es un número en el intervalo [0, 1], es obvio que el valor esperado se hace máximo para θ = 1. Es decir, la lotería con mayor valor esperado es aquella que invierte todo en X.

(c) La utilidad esperada de L_θ es U^E = 0,6·Ln(503 + 9,5·θ) + 0,4·Ln(509 - 14·θ). Suponiendo una solución interior, se tiene que cumplir:

$$\frac{\partial U^E}{\partial \theta} = \frac{0{,}6 \cdot 9{,}5}{503 + 9{,}5 \cdot \theta} - \frac{0{,}4 \cdot 14}{509 - 14 \cdot \theta} = 0 \quad \rightarrow \quad \theta = 0{,}635$$

Es decir, la cartera óptima invierte alrededor del 63% en el activo X.

(d) Los dos activos están negativamente correlados y además tienen una rentabilidad esperada similar. Al combinarlos, se obtiene una cartera con rentabilidad esperada también similar pero menor varianza. Por todo ello, una persona aversa al riesgo prefiere la cartera combinada o diversificada.

Ejercicio 14

García tiene 20000 euros y quiere comprarse una televisión. Conoce una tienda donde puede comprarla por 2000 euros seguro, pero también cree que en otra tienda Z podrían hacerle una rebaja de 300 euros (con lo que el precio serían 1700 euros). Su función de utilidad del dinero es $u(x) = \sqrt{x}$, donde x indica la riqueza después de comprar el televisor. Confirmar que le hacen rebaja en la tienda Z le costaría 100 euros por costes de desplazamiento, etc. ¿Con cuánta probabilidad p debe creer que le harán rebaja para que le valga la pena confirmarlo yendo a Z?

Comprar en la primera tienda es una lotería segura con utilidad esperada $\sqrt{18000} = 134{,}16$. Comprar en la tienda Z tiene dos posibles consecuencias en términos de riqueza final, con probabilidades p y 1-p: 18200 y 17900. Para que prefiera ir a Z, la utilidad esperada de esta lotería debe ser mayor:

$(1-p)\cdot\sqrt{17900} + p\cdot\sqrt{18200} > 134{,}16 \longrightarrow$ p>0,33

Ejercicio 15

Rodríguez quiere llevar una botella de vino a una cena de amigos. Conoce un vino A que, sin ser ninguna maravilla, está convencido de que agradará suficientemente a los comensales, con lo cual obtendría una utilidad de 30. Pero puede también probar con algún vino nuevo N para intentar sorprender a sus amigos favorablemente. Como no es un entendido en vinos, no obstante, piensa que puede equivocarse y llevar un vinacho mediocre con un 60% de probabilidad (su utilidad entonces sería de 0), mientras que con el 40% restante piensa que puede acertar (su utilidad sería entonces de 80). En vez de comprar el vino A o el N ahora mismo,

Rodríguez puede alternativamente dedicar una hora a buscar información sobre vinos, en cuyo caso piensa que la probabilidad de equivocarse con un vino N se reduciría al 30%. Sin embargo, esta búsqueda es costosa para él y reducirá en 10 útiles su utilidad en cualquier contingencia. Responda razonadamente qué hará Rodríguez. Utilizando el sencillo modelo expuesto y suponiendo que la mayoría de los consumidores sean como Rodríguez, ¿qué estrategia debería seguir una bodega que lanzase un vino nuevo para maximizar ventas?

Rodriguez tiene 3 alternativas. Primero, puede llevar el vino A, con lo que su utilidad será 30 con seguridad. Segundo, puede llevar un nuevo vino N, sin informarse antes. En ese caso, su utilidad esperada sería 0*0,6+80*0,4=32.

Finalmente, puede informarse antes de comprar un vino nuevo. En ese caso, su utilidad esperada sería de (0-10)*0,3 + (80-10)*0,7=46. Claramente, preferirá la tercera opción.

El resto del ejercicio consiste en discutir las distintas variables implícitas en este ejemplo sencillo, en particular sus efectos sobre la demanda de N.

Ejercicio 16

Supongamos un individuo que desea formar una cartera de inversión compuesta por la siguiente estructura de activos:

a) **Un bono cupón cero con un rendimiento del 20%**
b) **Un activo financiero que hoy vale 20 u.m. y en el futuro valdrá 15 u.m. o 50 u.m.con una probabilidad ½ cada posibilidad.**

Si la renta inicial disponible es de 100 u.m. y la función de utilidad U(W)=ln(W), cuanto invertirá el individuo en activo incierto?.

Si el individuo supiera que mañana la economía irá mal, por lo tanto, el rendimiento de invertir en el activo incierto es bajo, entonces decidirá invertir su ahorro en el bono de cupón cero.

Por el contrario, si supiera que la economía va a ir bien, invertiría íntegramente todo su ahorro en el activo incierto, que tiene un rendimiento del 50%, en vez del 20 % del cupón cero.

En nuestro caso, y dado que se ha supuesto que, dada la función de utilidad, el individuo es adverso al riesgo, comparando las utilidades esperadas observamos que la rentabilidad del bono es mayor.

$$U(100+20) > \frac{1}{2}U(100-20+15) + \frac{1}{2}U(100-20+50)$$

$$\ln(100+20) > \frac{1}{2}\ln(100-20+15) + \frac{1}{2}\ln(100-20+50)$$

$$4.79 > \frac{1}{2}(4.55) + \frac{1}{2}(4.87) = 2.28 + 2.44 = 4.72$$

Ejercicio 17

Supongamos que un consumidor quiere comprar un portátil. El consumidor sabe que hay cuatro tipos de vendedores, de modo que los de tipo I ponen un precio de 60€, los de tipo II un precio de 80€, los de tipo III un precio de 100€, y los de tipo IV un precio de 120€. La probabilidad de encontrar cada uno de los tipos es la misma. El consumidor hace una búsqueda simultánea –es decir, hace n búsquedas y observa los resultados de cada una sólo al final de la enésima búsqueda–, quedándose con el precio menor. La utilidad de la consecuencia 'pagar un precio p después de hacer n búsquedas' es u = –p –n·c, donde c indica el coste de cada búsqueda.

a) Determine la utilidad esperada de hacer una, dos, y tres búsquedas.

Hacer una búsqueda es una lotería con cuatro consecuencias: -60-c; -80-c; -100-c; -120-c; todas ellas con probabilidad ¼. Obviamente, su utilidad esperada es de -90-c. Para hallar la utilidad esperada de la lotería "dos búsquedas", debemos calcular previamente la probabilidad de que el precio menor hallado en las dos búsquedas sea 60, 80, 100 o 120, nótese que el precio menor es el único relevante. Por ejemplo, el precio menor será solo 120 solo si en las dos búsquedas ha salido un precio de 120, suceso cuya probabilidad es igual a 1/4*1/4=1/16. El precio mínimo será de 100 si en ambas búsquedas sale un precio de 100. O si sale 100 en una búsqueda y 120 en otra; la probabilidad conjunta seria 1/16+1/16+1/16=3/16. Con un razonamiento similar, la probabilidad de que el precio mínimo sea 80 es de 5/16, y la de precio mínimo 60 es (por eliminación) 7/16. En consecuencia, hacer dos búsquedas tiene una utilidad esperada de -77,5 – 2c. Si se hacen tres búsquedas, un razonamiento similar nos permite concluir que la probabilidad de que el precio mínimo sea de 120, 100, 80 o 60 es respectivamente de 1/64, 7/64, 19/64, 37/64. La utilidad esperada seria por tanto de -71,25-3c.

b) **¿Para qué valor de c será óptimo hacer una única búsqueda? ¿Y dos búsquedas?**

Para que una búsqueda sea optima debe cumplirse -90-c>-77,5-2c, es decir c>12,5. Por otro lado, dos búsquedas será mejor que una si c<12,5 y mejor que tres si además -77,5-2c >-71,25-3c, entonces c>6,25.

c) **¿Cuántas búsquedas debería hacer el consumidor si quisiera comprar no uno sino dos portátiles y el coste de cada búsqueda adicional fuese 8€?**

Lo único que variaría en el análisis previo es que el precio mínimo esperado será doble porque hay que comprar dos portátiles. Por tanto, el individuo hará una búsqueda si c>25, dos si c>12,5, y si c=8 está claro que hará tres.

d) **Repita el apartado a) para el caso en que la búsqueda sea <u>secuencial</u>, es decir, el resultado de cada búsqueda se observa nada más realizarla.**

Una única búsqueda es claramente lo mismo en modo secuencial o simultaneo. Dos búsquedas en modo secuencial se diferencian del modo simultaneo en que no hace falta realizar una segunda búsqueda si en la primera se encuentra el precio más bajo posible, es decir, 60. Por tanto, hay que distinguir entre encontrar un precio 60 en la primera búsqueda (probabilidad ¼), con lo cual la utilidad sería de -60-c, o en la segunda (probabilidad 3/4*1/4), donde la utilidad seria -60-2c. Por lo demás, el resto del análisis es idéntico. Para el caso con 3 búsquedas secuenciales tendríamos que proceder haciendo una distinción similar.

Ejercicio 18

Imagine que usted es un inversor con una riqueza inicial de 10.000 euros. En una fiesta, un informático algo achispado le propone adquirir los derechos de uso y distribución de un programa creado por él. Como usted siempre lleva su talonario en el bolsillo, tan sólo debe escribir lo que desee ofrecer en un cheque al portador. Ahora, su intuición le indica que hay un 20% de probabilidad de que el programa no valga nada, un 30% de que sea un programa mediano que le reporte unos beneficios de 5.000, y un 50% de que sea realmente bueno y le reporte 10.000. Estas ganancias puede obtenerlas un economista tan bueno como usted. Por el contrario, el informático sólo obtendría la mitad de lo que usted ganase en cada caso, pues es mucho peor gestor y comercializador. Por lo tanto: El informático, que conoce la calidad real del programa, aceptará como mínimo un cheque por la mitad de lo que usted ganaría realmente. Suponga que usted es neutral al riesgo, con utilidad de la riqueza U(x) = x, donde x indica la riqueza <u>final</u>. Utilizando la teoría de la utilidad esperada, responda razonadamente: (a) ¿Qué precio escribirá usted? (b) Si pudiera obtener información fehaciente sobre la calidad del programa, ¿cuánto pagaría por ella como máximo?

a) Nótese que los únicos precios que podría tener sentido ofrecer son 0, 2500 o 5000. Cualquier otro es más de lo que el informático pide en cada contingencia, con lo cual no es óptimo. Tenemos por tanto tres loterías:

   1) Precio 0: lotería segura 10000 euros porque o bien no nos venderá el programa o nos dara algo sin valor. La utilidad esperada es de 10000.
   2) Precio 2500: esta lotería tiene 3 consecuencias posibles. Con probabilidad 20%, el programa carece de valor y nos quedamos con 10000-2500=7500. Con probabilidad 30%, el programa rinde beneficios de 5000, con lo cual acabaríamos con una riqueza de 10000-2500+5000=12500. Con probabilidad 50%, el programa es realmente bueno y el informatico no nos

lo vende, con lo cual nos quedamos con la riqueza inicial, 10000. La utilidad esperada de la lotería es por tanto 0,2+7500+0,3*12500+0,5*10000=10250.

3) Precio 5000: otra lotería con 3 consecuencias posibles. Con probabilidad 20%, el programa carece de valor y nos quedamos con 10000-5000=5000. Con probabilidad 30%, el programa rinde beneficios de 5000, con lo cual acabaríamos con una riqueza de 10000-5000+5000=10000. Con probabilidad 50%, el programa da beneficios de 10000, con lo cual nos quedamos con una riqueza final de 10000-5000+10000=15000. La utilidad esperada de la lotería es por tanto 0,2*5000+0,3*10000+0,5*15000=11500.

   Comparando las utilidades esperadas, se sigue que deberá ofrecer un precio de 5000 euros.

b) Si usted paga c euros por la información, posteriormente ofrecerá justo lo que valga el programa. Pagar por la información es por tanto una lotería con 3 consecuencias: i) con probabilidad del 20%, el programa carece de valor y no pagamos nada por él, con lo que nos quedamos con 10000-c, ii) con probabilidad 30%, el programa rinde beneficios de 5000; entonces pagamos solo 2500 y acabamos con una riqueza de 10000-2500+5000-c=12500-c. Con probabilidad 50%, el programa da beneficios de 10000; entonces pagamos 5000 por el y obtenemos una riqueza final de 10000-5000+10000-c=15000-c. La utilidad esperada de la lotería es por tanto 0,2*(10000-c)+0,3*(12500-c)=13250-c. Convendra pagar por la información siempre que 13250-c sea mayor que 11500, la máxima utilidad que puede obtenerse no pagando. Por tanto, lo máximo que se pagaría es 13250-11500=1750 euros.

Ejercicio 19

El Gobierno de un pequeño país ha iniciado recientemente un plan de estabilización; no está claro si éste será exitoso o no. Se estima que con una probabilidad del 50% el plan será exitoso y que, también con una probabilidad de un 50%, éste fracasará. Un empresario debe elegir entre dos proyectos de inversión, uno en el pequeño país y otro en el extranjero.

Las utilidades del proyecto en el extranjero serán de 400 mil dólares, independientemente de si el plan de estabilización fracasa o no. Las utilidades del proyecto en el país serán de 200 mil dólares si el plan de estabilización fracasa y de 800 mil si éste tiene éxito. El empresario es neutro al riesgo. Responda las siguientes preguntas, justificando sus respuestas:

a) **¿Cuál de los proyectos de inversión elegirá el empresario?**
b) **¿¿Cuál es la mayor cantidad de dinero que el empresario estaría dispuesto a pagar por saber, antes de decidir cuál inversión realizar, si el plan de estabilización será exitoso o no?**

Resumamos la información:

	Plan fracasa (prob. 0.5)	***Plan exitoso (prob. 0.5)***
Utilidades proyecto extranjero	400.000	400.000
Utilidades proyecto país pequeño	800.000	200.000

a) Escogerá aquella alternativa que en promedio le reporte mayor ingreso.

Ingreso proyecto extranjero: 400000
E(ingreso país)=800000*0.5+200000*0.5=500000
Por lo tanto, escogerá invertir en el país pequeño.

b) En ese caso debemos calcular cual es el valor esperado del ingreso con información perfecta y comparada con la parte a) sin información:

Si tuviéramos información perfecta y supiéramos que el plan será exitoso invertiríamos en el país, pero si sabemos que será un fracaso, invertimos en el extranjero. Recordemos además que se trata de un individuo neutral al riesgo. Entoncés:
E(ingreso con información)=800000*0.5+400000*0.5=400000+200000=600000
E(ingreso sin información)=500000
Por lo tanto, estaremos dispuestos a pagar como mucho 100000 por tener información perfecta.

Ejercicio 20

Suponga que usted dispone de 10.000 para invertir y existen dos alternativas de inversión: acciones de la compañía A y acciones de la compañía B. Una acción de cualquiera de las dos compañías cuesta 1 y usted cree que aumentará a 2 si la compañía tiene un buen desempeño y que la acción quedará sin valor si el desempeño es malo. Cada compañía tiene una probabilidad de 50% de marchar bien. Si usted decide que invertirá solo 4.000 y evalúa las siguientes alternativas:

- **Alternativa 1: invertir solo en la empresa A.**
- **Alternativa 2: invertir la mitad en la empresa A y mitad en la empresa B.**

Calcule las utilidades asociadas a cada alternativa y muestre gráficamente que la estrategia diversificada le entregará una mayor utilidad.

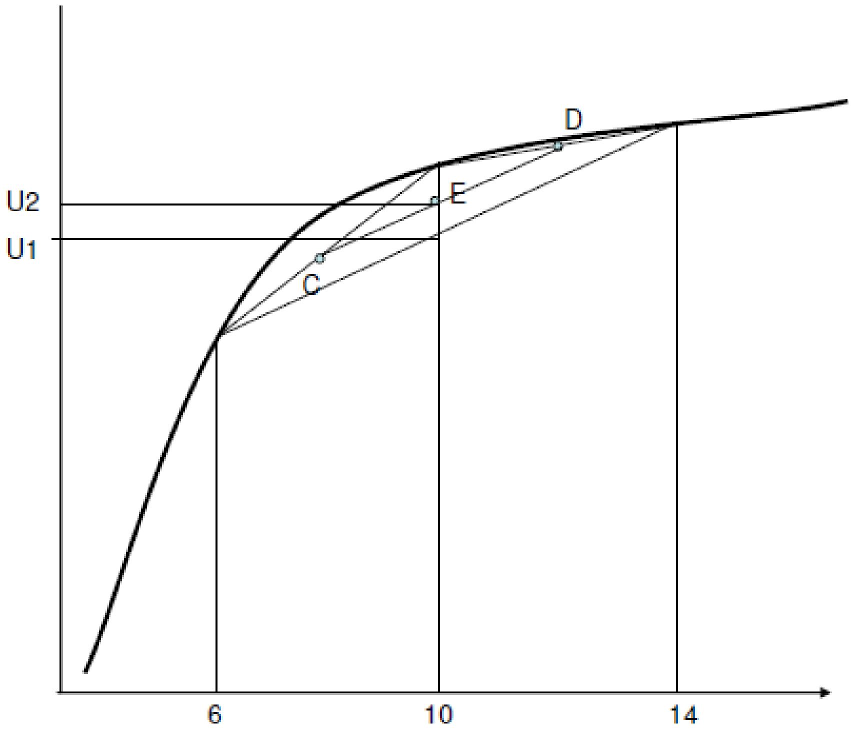
Supongamos que invierte todo en A: con un 50% de probabilidad obtendré finalmente 6000 (pierdo los 4000 que invierto y me quedo solo con 6000) y con un 50% obtendré 14000 (doblo los 4000 que apuesto: 8000 mas los 6000 = 14000).
Por lo tanto, E(ingreso invertir solo en A)=0.5*6000+0.5*14000=10000
Este nivel de ingreso tiene asociado un nivel de utilidad U1.

Ahora si invierto 2000 en A y 2000 en B, tendré 4 escenarios posibles:

	B: resultado malo	**B: resultado bueno**
A: resultado bueno	6000	10000
A: resultado malo	10000	14000

En este caso vemos que el resultado del ingreso esperado es el mismo E(ingreso de diversificar)=10000
La diferencia está en que esta alternativa es menos arriesgada, porque solo en el 25% de los casos quedo con 6000.

Para realizar el análisis gráfico, del promedio de 6000 y 10000 obtenemos el punto C, del promedio de 10000 y 14000 obtenemos el punto D, y del promedio de C y D obtengo E.



Claramente es nivel de utilidad de U2 es mayor que el de U1. Eso demuestra que el diversificar se tiene mayor utilidad.